Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XV, n.º 3 (1991), págs. 601-625

UN METODO ANALITICO PARA EVALUAR LA PROBABILIDAD DE QUIEBRA

Iñaki MAULEON*
UNED y Fundación Empresa Pública

El problema de estimar la probabilidad de quiebra se ha abordado tradicionalmente mediante el análisis discriminante de empresas saneadas y con dificultades. Un problema importante de este modelo es la estabilidad temporal de sus estimaciones. El método propuesto en este trabajo trata de resolver este problema partiendo de la consideración explícita de las funciones que definen el valor de una empresa, o sector económico. Así, el valor de una empresa queda definido como una variable aleatoria, aunque compleja. El paso siguiente es, entonces, diseñar métodos para el cálculo analítico y numérico de su distribución. Este enfoque permite, también, analizar con claridad la relación entre los enfoques de simulación y los de evaluación del riesgo.

1. Introducción

El trabajo que se presenta en este documento surgió como respuesta a la dificultad de entender el fundamento del modelo de Altman. Este modelo es de carácter empiricista, y su objetivo es determinar estadísticamente los parámetros de una función lineal que relaciona la probabilidad de quiebra de una empresa con una serie de «ratios» de balance y de factores sociológicos. El modelo descrito no plantearía problemas especiales, de no ser por la inestabilidad que sus coeficientes muestran a lo largo del tiempo en la práctica.

Por otra parte, este modelo deja sin resolver la relación entre los métodos de valoración de empresas y de simulación de sus resultados, y los métodos de evaluación del riesgo (es decir, cálculo de medias y varianzas del valor de una empresa o sector económico). El interés por el modelo de Altman, 1968, 1977, creció en la pasada década con las crisis de empresas industriales y del sistema bancario. Un buen número de trabajos empíricos son testigos de esta afirmación (por ejemplo, en el caso español, Martínez Mongay *et al.*, 1988, Rodríguez Fernández, 1987, 1988).

Paralelamente han tenido lugar algunos desarrollos teóricos cuyo objetivo ha sido determinar la probabilidad de quiebra en algunos modelos muy simplificados (Rosen, 1974 y Hamermesh, 1988, por ejemplo). El trabajo que se presenta a continuación trata de resolver analíticamente el problema mencionado de inestabilidad de los coeficientes en el contexto de modelos más rea-

* Agradezco los comentarios de Julio Segura y Jordi Jaumandreu y los de un evaluador anónimo. La responsabilidad de los posibles errores es únicamente mía.

listas. Además, el marco de análisis propuesto permite también realizar simulaciones para calcular la probabilidad buscada con relativa facilidad. El enfoque propuesto tiene la ventaja de integrar el análisis de simulación (cálculo de medias) y el de evaluación del riesgo (cálculo de varianzas), en un esquema teórico que muestra con claridad la relación entre ambos aspectos.

La sección 2 presenta el desarrollo del cálculo de la probabilidad de quiebra en algunos modelos sencillos, e ilustra las dificultades que puede plantear el enfoque de Altman, que aparece como un caso particular del desarrollo analítico propuesto. La sección 3 presenta el detalle de los cálculos y propone cuatro métodos para calcular las probabilidades relevantes, a la vez que se ilustra el cálculo de las simulaciones mediante un sencillo ejemplo. Por último, la sección 4 recoge las conclusiones más relevantes.

2. Un modelo simple

El problema que se discute en este trabajo, quizá puede ser clarificado por medio de la consideración de algunos ejemplos simplificados. Para ello, comenzaremos esta sección por el análisis del modelo siguiente para el beneficio de una empresa en un momento dado,

$$\pi = p \cdot Q - w \cdot L - r \cdot F \qquad [1]$$

donde «p» es el precio del producto «Q» que dicha empresa produce, «w» son los salarios, «L» el empleo, «r» el tipo de interés nominal, y «F» la financiación ajena. No se consideran dotaciones a fondos propios, ni otro tipo de «*inputs*», por el momento, para simplificar la exposición. Supongamos que en este modelo, «Q», «L» y «F» son cantidades fijadas de antemano (por el momento y con el único objetivo de ilustrar algunos problemas básicos simplemente), pero los precios «p», «w», «r», son variables aleatorias de modo que,

$$\begin{aligned} p &= p^* + \epsilon_1 \\ w &= w^* + \epsilon_2 \\ r &= r^* + \epsilon_3 \end{aligned} \qquad [2]$$

donde $E(\epsilon_1) = E(\epsilon_2) = E(\epsilon_3) = 0$, y suponemos que estos errores cumplen las características usuales (varianza constante y no correlación serial, en particular). Supondremos, también, y para simplificar la notación que los errores son independientes entre sí, y $E\epsilon_i^2 = \sigma_i^2$. Es obvio, ahora, que el beneficio distribuido «π», es una variable aleatoria con las siguientes características,

$$\begin{aligned} \pi &= (p^* Q - w^* L - r^* F) + (\epsilon_1 Q - \epsilon_2 L - \epsilon_3 F) \\ &\pi^* + u \end{aligned} \qquad [3]$$

donde $\pi^* = E(\pi)$, y donde la varianza de «u» está dada por,

$$\sigma^2(u) = \sigma_1^2 Q^2 + \sigma_2^2 L^2 + \sigma_3^2 F^2 \qquad [4]$$

Puede ser interesante observar, que los valores de Q, L y F, estarán determinados por funciones de demanda, de modo que serán variables aleatorias, en general (este punto se desarrolla con mayor detalle en la siguiente sección). Por el momento baste con observar que todo el desarrollo de esta sección es igualmente válido para el caso en que sean variables aleatorias del tipo $Q = Q^* + \epsilon_4$, etc. en el mismo espíritu que [2]. La única diferencia es que la varianza de u en [3] será una expresión algo más compleja algebraicamente.

Una posible forma de analizar el problema de la quiebra, que tiene la ventaja de ser sistemática, es considerar el valor patrimonial de la empresa, dado por

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} (\pi_t \, d_t) \qquad [5]$$

donde «d_t» es un factor de descuento, que normalmente coincidirá con $(1+r)^{-t}$. Si en lugar del beneficio, π, tomamos el cash-flow (beneficio más depreciación (δ)) la tasa de descuento relevante es $(1+r+\delta)^{-t}$. Alternativamente, podemos considerar un sumatorio finito, con un número de términos igual al período de vida efectiva del equipo capital, y la tasa de descuento relevante seguiría siendo $(1+r)^{-t}$. Este enfoque plantea el problema de cómo calcular la vida efectiva del equipo capital. Por otra parte, es evidente que las empresas se establecen, en general, sin un horizonte definido para su liquidación, o en otras palabras, bajo el proyecto de que perduren. Así se recoge habitualmente en los tratados de teoría económica, motivo por el que el resto de este trabajo se desarrolla bajo este hipótesis (véase por ejemplo, L. A. Rojo, pág. 335, y, T. Sargent, págs. 128 y 333, por citar dos referencias bien conocidas por los estudiosos de teoría económica en este país). En cualquier caso, es conveniente observar que los métodos propuestos en este trabajo cubren, también, la hipótesis de un período de vida finito. También es interesante señalar la posible conveniencia de utilizar el enfoque CAPM para calcular la tasa de descuento relevante a toda empresa, de modo que incorpore una medida del riesgo implicado (es decir $r_i = r_j + \beta_i\,(r_m - r_j)$, siendo r_j el tipo de interés sin riesgo, r_m el rendimiento del mercado, β_i el beta del título, y finalmente, r_i, la tasa de interés exigible al título considerado). De acuerdo a esta expresión, se considerará que una empresa está en situación de quiebra técnica si $V_0 < 0$. Esta definición es, por supuesto, relativamente arbitraria, pero esto no afecta esencialmente a los desarrollos que se presentan a continuación (puede definirse la quiebra alternativamente, por ejemplo, como $V_0 < K$, donde K es alguna constante diferente a cero). A partir de [3], es evidente que «V_0» es, también, una variable aleatoria, por lo cual, una pregunta más interesante es cuál es la probabilidad de que $V_0 < 0$. Para contestar a esta pregunta es preciso, en primer lugar, calcular la función de probabilidad de «V», lo que se desarrolla a continuación. Consideremos una situación en la que «Q», «L» y «F» son constantes a lo largo del tiempo. Entonces,

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \sum_{t=1}^{\infty} (\pi_* + u_t)\, d_t \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \pi_* d_t + \sum_{t=1}^{\infty} u_t d_t \qquad [6] \\
&= \left(\frac{\pi_*}{r}\right) + w
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, la media de «V_0» es π^*/r. Para calcular su varianza, efectuamos el siguiente desarrollo,

$$
\begin{aligned}
E(w)^2 &= \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_u^2\, d_t^2 \\
&= \frac{\sigma_u^2}{(1+r)^2 - 1}
\end{aligned} \qquad [7]
$$

Obsérvese que sería incorrecto calcular la varianza a partir de $V_0 = \pi/r = \pi^*/r + u/r$, de modo que $\sigma^2(V_0) = \sigma_u^2/r^2$; el motivo es que la expresión $V_0 = \pi/r$ solamente es cierta cuando el beneficio es constante, cosa que no ocurre en el presente contexto, ya que lo único que es constante es su media.

Si suponemos, ahora, que los errores «$\in_i$» siguen una distribución normal, también lo hará «w», de modo que podemos escribir, finalmente,

$$V_0 \sim N(\pi^*/r,\ \sigma_u^2/((1+r)^2 - 1)) \qquad [8]$$

A partir de aquí, podemos calcular la probabilidad buscada de que «V_0» sea negativo. Es interesante notar, también, que un desarrollo similar se obtiene suponiendo que la media de los beneficios crece a una tasa constante «g», de modo que,

$$\pi_t^* = (1+g)\, \pi_{t-1}^* \qquad [9]$$

Un supuesto lógico que debe acompañar a [9] es,

$$\sigma^2(u_t) = (1+g)^2\, \sigma^2(u_{t-1}) \qquad [10]$$

de modo que $(\sigma(\pi_t)/E((\pi_t))$ se mantenga constante. En estas condiciones es fácil demostrar que se obtiene una expresión similar a [8], dada por

$$V_0 \sim N(\pi_0^*(1+y)/(r-g) \quad , \quad \sigma_0^2(1+g)^2/((1+r)^2 - (1+g)^2))$$

donde $\sigma_0 = E(u_0^2)$.

Otro aspecto interesante de los desarrollos anteriores es la reducción de variabilidad del valor de una empresa, relativo a su beneficio medio. Para ver este punto consideremos la expresión,

$$\sigma(V_0)/E(V_0) = (\sigma/\pi^*) \cdot r/((1+r)^2 - 1)^{1/2}$$
$$\simeq (\sigma/\pi^*)\,(r^{1/2}/\sqrt{2}) \qquad [11]$$

para valores de «r» no demasiado altos. Es decir, la variabilidad del valor de una empresa en relación a su media, desciende drásticamente, de acuerdo a esta expresión, si la comparamos con la del beneficio. Por ejemplo, si $r = 0.1$, el cociente $(r^{1/2}/\sqrt{2})$ es aproximadamente igual a 0.22, lo que implica que el cociente $(\sigma(V_0)/E(v_0))$ se reduce en casi 5 veces respecto al (σ/π^*).

Retomando la discusión principal, a partir de [8] podemos evaluar la probabilidad de que «V_0» sea negativo de la siguiente forma,

$$P(V_0 < 0) = P\left(\frac{V_0 - \bar{V}_0}{\sigma_v} < -\frac{\bar{V}_0}{\sigma_v}\right) = \Phi\left(\frac{-\bar{V}_0}{\sigma_v}\right) \qquad [12]$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de una variable distribuida normalmente con media cero y varianza unitaria. De este modo, y teniendo en cuenta [3] y [4], comprobamos que la probabilidad de quiebra depende de las varianzas de todos los precios «p», «w», y «r» (positivamente), y del valor del beneficio medio esperado (negativamente). Efectuando alguna transformación de [12], podemos relacionar, ahora, este enfoque con el de Altman. De hecho, el cociente $(\bar{V}_0/\sigma_V)$ podemos reescribirlo del siguiente modo,

$$\frac{\bar{V}_0}{\sigma_V} = \left(\frac{r^{1/2}}{\sqrt{2}}\right)\frac{(pQ - wL - rF)}{(\sigma_1^2 Q^2 + \sigma_2^2 L^2 + \sigma_3^2 F^2)^{1/2}} = \left(\frac{r^{1/2}}{\sqrt{2}}\right)\frac{p - w\left(\frac{L}{Q}\right) - r\left(\frac{F}{Q}\right)}{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\left(\frac{L}{Q}\right)^2 + \sigma_3^2\left(\frac{F}{Q}\right)^2\right)^{1/2}} \qquad [13]$$

Puede desarrollarse por Taylor la expresión [12], ahora, como función de los cocientes (L/Q), (F/Q) y obtenemos,

$$p(V_0 < 0) \simeq \delta_0 + \delta_1(L/Q) + \delta_2(F/Q) \qquad [14]$$

que es una expresión del tipo de las utilizadas por Altman (en lugar de «Q», podríamos haber utilizado como factor de escala el capital, o cualquier otra variable). En definitiva, vemos que la probabilidad buscada puede ponerse como función lineal de «ratios» de balance u otros, clásicos en el análisis contable de una empresa. La expresión [14] permite estimar los parámetros «δ» con observaciones para diferentes empresas en un momento del tiempo, ya que los cocientes (L/Q), (F/Q), serán distintos para diferentes empresas. Por otra parte, el valor «V_0» está dado para unos valores de L, Q y F planeados en $t = 0$, pero que a lo largo del tiempo pueden cambiar, obviamente (es decir, a

V_1 le pueden corresponden otros valores de L, Q y F, si cambian los planes de la empresa). Esto permite estimar el modelo a lo largo del tiempo, o con datos de panel si se desea. Pero el problema inmediato que esta aproximación plantea, es la estabilidad de los coeficientes δ_0, δ_1, δ_2. En la práctica se ha encontrado que las estimaciones econométricas de modelos del tipo [14], no son demasiado estables con el paso del tiempo. La razón es que los coeficientes «δ» dependen de los valores medios y de las varianzas de «p», «w», y «r», de modo que si éstas cambian, aquéllos también lo harán. Por ejemplo, épocas de gran variabilidad de los tipos de interés harán que el coeficiente «δ_2» aumente, mientras que en períodos de fuertes incrementos salariales, será el coeficiente «δ_1» el que crecerá. Además, no debe olvidarse que la aproximación lineal de [14] no parece excesivamente ajustada, de modo que esto será una causa adicional que provoque la inestabilidad de toda la expresión. En resumen: el modelo de Altman es teóricamente derivable como una aproximación lineal a la probabilidad de quiebra derivada analíticamente. Esta aproximación, además, puede ser bastante inestable en el tiempo.

El enfoque alternativo que se propone en este documento está contenido, por supuesto, en la expresión [12], es decir, en la derivación analítica exacta de la probabilidad. No obstante, el modelo analizado hasta ahora es extremadamente sencillo y poco realista. Por ejemplo, lo probable es que las cantidades «Q», «L», «F», no sólo no sean constantes, sino que dependan de los precios a través de funciones de demanda aleatorias. Es decir, Q, L y F se determinarán a través del proceso usual que en teoría económica se supone para el comportamiento de la empresa, y que conduce a la función de oferta para Q, y a las de demanda derivada para los factores L y F (véase por ejemplo, H. Varian, pág. 23, y en general la sección 1.7, por citar una referencia standard). En econometría estas funciones se aproximan utilizando un error aleatorio que recoge todo lo no considerado explícitamente, y esto da lugar, finalmente, al carácter aleatorio. Además, los errores de dichas funciones de demanda pueden presentar correlación serial. Para exponer someramente el grado de complicación analítica que el cálculo de la probabilidad buscada requiere, puede ser útil considerar el siguiente ejemplo,

$$
\begin{aligned}
\pi_t &= \pi_t^* + u_t \\
u_t &= \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t \; // \quad E\,\varepsilon_t^2 = \sigma^2 \; // \quad E\,\varepsilon_t = 0 \\
V_0 &= \sum_{t=1}^{\infty} \pi_t d_t \qquad\qquad [15] \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \pi_t^* d_t + \sum_{t=1}^{\infty} d_t u_t \\
&= V^* + \sum_{t=1}^{\infty} w_t
\end{aligned}
$$

El cálculo de la varianza de «V_0» se complica enormemente en este caso, ya que «w_t» está correlacionado serialmente y, además, es heterocedástico. Es decir,

$$\begin{aligned} d_t u_t &= \alpha\, d_t\, u_{t-1} + d_t\, \varepsilon_t \\ &= \alpha\,(d_t/d_{t-1})\,(d_{t-1}\, u_{t-1}) + (d_t\, \varepsilon_t) \end{aligned} \qquad [16]$$

de donde obtenemos,

$$\begin{aligned} w_t &= \gamma\, w_{t-1} + e_t \\ \gamma &= \alpha(d_t/d_{t-1}) \\ &= \alpha/(1+r) \\ E(e_t^2) &= \sigma^2(1+r)^{-2t} \end{aligned} \qquad [17]$$

Una manera de calcular la varianza de «V_0» es considerar el segundo término de la última línea de [15] cuando $t = 1 \ldots m$, lo que después de algunos cálculos conduce a la expresión,

$$\sum_{t=1}^{m} w_t = \sum_{t=1}^{m} e_t\, \phi_t + \psi_0$$

$$\phi_t = \frac{1 - \gamma^{m-t+1}}{1 - \gamma} \qquad [18]$$

$$\psi_0 = w_0 \sum_{s=1}^{m} \gamma^s$$

A partir de aquí se obtiene,

$$E\left(\sum_{t=1}^{m} w_t\right)^2 = \left(\frac{\sigma^2}{1-\gamma^2}\right) \sum_{s=1}^{m} (1+r)^{-2s} + R \qquad [19]$$

donde R agrupa a una serie de términos obtenidos al desarrollar ϕ_s^2, y cuyo límite cuando $m \rightarrow \infty$, puede calcularse fácilmente. Tomando este límite en la última expresión obtenemos, finalmente, la varianza buscada.

El objetivo de este último ejercicio, no ha sido otro que exponer la considerable complicación analítica que plantea el cálculo de la probabilidad buscada, cuando se desarrolla en el contexto de modelos realistas. Estas dificultades son las que justifican el desarrollo de la sección siguiente. Por otra parte, debe indicarse desde ahora que el cálculo analítico de las probabilidades, aunque complejo, es perfectamente factible.

3. Cálculo de las probabilidades y bandas de confianza

Para analizar este punto vamos a considerar un modelo simplificado de determinación del beneficio distribuido (π), dado por la diferencia entre el cash-flow, y los ingresos netos no distribuidos, o reservas más amortizaciones (A).

El esquema de balance simplificado en este caso estará dado por la identidad,

$$K = Cr + A + Cp \qquad [20]$$

siendo «K» el inmovilizado total, «Cr» el crédito total, y «Cp» el capital nominal propio de la empresa. El beneficio distribuido estará dado, entonces, por la expresión siguiente,

$$\pi = p \cdot Q - w \cdot L - m \cdot M - r \cdot Cr - \Delta A \qquad [21]$$

para un perído «t» siendo M las materias primas y m su precio (por el momento, no se consideran costes de ajuste ni impuestos, para simplificar los aspectos esenciales de la presentación). Substituyendo, ahora, el término «ΔA», a partir del balance obtenemos la expresión,

$$\pi = p \cdot Q - w \cdot L - m \cdot M - r \cdot Cr - I_b + \Delta Cr + \Delta Cp \qquad [22]$$

siendo «I_b» la inversión bruta (es decir, $I_b = \Delta K$; supondremos que las existencias son nulas, para simplificar).

Para analizar el problema que plantea el cálculo de la distribución de probabilidad de «π», vamos a considerar las diferentes formas que pueden adoptar las funciones de demanda implicadas en la última expresión obtenida para el beneficio distribuido. Es suficiente desarrollar este análisis en detalle para una sola función, suponiendo que todas las demás adoptan una forma sencilla. Concretamente supondremos lo siguiente,

$$\begin{aligned} M &= \alpha Q \\ Cr &= \beta_1 Q - \beta_2 r \\ I &= \gamma_1 Q - \gamma_2 r \end{aligned} \qquad [23]$$

Para la demanda de empleo se analizarán las posibles especificaciones siguientes, que son las más comunes en estudios empíricos.

$$\begin{aligned} &1.^{\circ} \quad L = \delta_0 L_{-1} - \delta_1 w - \delta_2 w_{-1} + \delta_3 Q \\ &2.^{\circ} \quad \Delta L = -\delta_0 \Delta w + \delta_1 \Delta Q \\ &3.^{\circ} \quad \log(L) = -\delta_0 \log(w) + \delta_1 \log(Q) \\ &4.^{\circ} \quad \Delta\log(L) = -\delta_0 \Delta\log(w) + \delta_2 \Delta\log(Q) \end{aligned} \qquad [24]$$

Los problemas planteados por otro tipo de especificaciones más complejas como, por ejemplo, modelos dinámicos en tasas de crecimiento, pueden reducirse a combinaciones de los cuatro casos mencionados. Se supone por comodidad, también, que $\Delta Cp = 0$, aunque este supuesto puede relajarse con facilidad.

La fórmula para el beneficio, en el caso 1.º, una vez sustituidas todas las ecuaciones de demanda, viene dada por la expresión siguiente,

$$\begin{aligned}\pi &= p \cdot q - w(\delta_0 L_{-1} - \delta_1 w - \delta_2 w_{-1} + \delta_3 Q) - m(\alpha Q) - \\ &\quad - r(\beta_1 Q - \beta_2 r) - (\gamma_1 Q - \gamma_2 r) + (B_1 Q - B_2 r) - \\ &\quad - Cr_{-1} \\ &= p \cdot Q - \delta_0(wL_{-1}) + \delta_1 w^2 + \delta_2(w \cdot w_{-1}) - \delta_3(Q \cdot w) - \alpha(m \cdot Q) \\ &\quad - \beta_1(r \cdot Q) + \beta_2 r^2 + (\beta_1 - \gamma_1) Q + (\gamma_2 - \beta_2) r \end{aligned} \qquad [25]$$

Si suponemos que la ecuación de demanda de empleo tiene un error aleatorio añadido al final que, además, está distribuido normalmente, tendremos que «L» será una variable normal con varianza finita (siempre que $(\gamma_0) < 1$). Supondremos, adicionalmente, que las restantes variables del modelo siguen, también, distribuciones normales de probabilidad. Entonces, la expresión anterior puede escribirse como una forma cuadrática en un vector de variables normales, y puede aplicarse la técnica de Imhof para calcular la distribución exacta de π. Para analizar en detalle este punto, comenzamos por definir el vector «z» de la siguiente forma,

$$z = (p, Q, w, w_{-1}, L_{-1}, m, r) \qquad [26]$$

que es el vector formado por todas las variables aleatorias que entran a formar parte de la definición del beneficio distribuido. Es evidente, entonces que esta última magnitud es una suma de dos componentes: *a*) productos cruzados entre las variables de «z», y, *b*) un componente lineal en los elementos de «z». En consecuencia, es automático que podemos escribir,

$$\pi = z' Hz + B'z \qquad [27]$$

para determinadas matrices H y B. Por otra parte, como se cumple que,

$$z' Hz = (z' Hz)' = z' H'z \qquad [28]$$

siempre podemos definir,

$$z' Az = z'((H+H')/2)z \qquad [29]$$

y ahora la matriz «A» será simétrica.

Definiendo, ahora, el vector «z^*» como

$$z^* = -(1/2) A^{-1} B \qquad [30]$$

es sencillo comprobar que el beneficio puede reescribirse en la forma siguiente,

$$\pi = (z - z^*)' A(z - z^*) - z^{*\prime} B z^* \qquad [31]$$

expresión que define el beneficio como la suma de una constante y una forma cuadrática en «z». Si A es singular, el último desarrollo únicamente será válido si existe algún vector tal que $B = -2Av$, y este vector «v» será la solución para z^*. En todo caso, el beneficio sigue siendo una forma cuadrática y ningún desarrollo posterior se ve alterado por este hecho.

En el ejemplo concreto que nos ocupa, las matrices A y B están definidas de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
a_{12} &= 1/2 = a_{21} \\
a_{23} &= -\delta_3/2 = a_{32} \\
a_{26} &= -\alpha/2 = a_{62} \\
a_{27} &= -\beta_1/2 = a_{72} \\
a_{33} &= \delta_1 \\
a_{34} &= \delta_2/2 = a_{43} \\
a_{35} &= -\delta_0/2 = a_{53} \\
a_{77} &= \beta_2 \\
B_2 &= (\beta_1 - \gamma_1) \\
B_6 &= (\gamma_2 - B_2)
\end{aligned} \qquad [32]$$

Los restantes elementos no especificados son cero.

Para obtener estas definiciones es útil redefinir «z» de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
z &= (p, Q, w, w_{-1}, L_{-1}, m, r) \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)
\end{aligned} \qquad [33]$$

con lo que «π» queda definido como,

$$\begin{aligned}
\pi = x_1\, x_2 - \delta_0(x_3x_5) + \delta_1\, x_3^2 + \delta_2(x_3x_4) - \delta_3(x_2x_3) - \\
- \alpha(x_6x_2) - \beta_1(x_7x_2) + \beta_2\, x_7^2 + (\beta_1 - \gamma_1)\, x_2 + \\
+ (\gamma_2 - \beta_2)\, x_7
\end{aligned} \qquad [34]$$

En definitiva, comprobamos que, el beneficio distribuido puede ser expresado como una forma cuadrática en variables distribuidas normalmente.

Aunque el cálculo de bandas de confianza para los beneficios distribuidos de un período concreto es importante, mayor interés presenta el cálculo de probabilidades para el valor patrimonial de un sector o empresa industrial en un momento dado, que puede definirse por la expresión,

$$V_0 = \sum_{s=0}^{\infty} \pi_s\, d_s \qquad [35]$$

siendo «d_s» un determinado factor de descuento. Como quiera que se intente calcular probabilidades para la expresión anterior, el problema que ésta plantea es que está formado por un número infinito de componentes. Entonces, no parece factible aplicar ningún método analítico ni de simulación, para resolver el cálculo de probabilidades. Parece necesario, por tanto, buscar simplificaciones, y a continuación se sugiere una que aquí se considera como razonable. Como se expone en otro apartado, es conveniente suponer que a partir de un cierto momento «n», el beneficio (o su tasa de crecimiento) se estabiliza (por ejemplo, se iguala con el beneficio «normal» del mercado, y con su tasa de crecimiento). La fórmula para el valor de la empresa queda, entonces, como sigue,

$$V_0 = \sum_{s=0}^{n} \pi_s d_s + \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \xi_s d_s + \pi_n^* \sum_{s=n+1}^{\infty} d_s \right) \qquad [36]$$

donde suponemos que «π_s» es una variable aleatoria de media π_s^*, es decir,

$$\pi_s = \pi_s^* + \xi_s,\ \pi_s^* = E(\pi_s) \qquad [37]$$

La varianza de «V_0» es, entonces, la siguiente,

$$Var(V_0) = \sum_{(s,r)=0}^{\infty} d_s d_r \sigma_{sr} \qquad [38]$$

siendo $\sigma_{sr} = E(\xi_s \xi_r)$. Por las razones que enseguida se harán evidentes, es interesante reescribir esta expresión como sigue,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(V_0) = & \sum_{(s,r)=0}^{\infty} d_s d_r \sigma_{sr} \\ & + \sum_{(s,r)=n+1}^{\infty} (d_s d_r) \sigma_{sr} \\ & + 2 \sum_{\substack{s=(0,n) \\ r=(n+1,\infty)}} (d_s d_r) \sigma_{sr} \end{aligned} \qquad [39]$$

Por otra parte, la esperanza de «V_0» viene dada trivialmente por la expresión,

$$E(V_0) = \sum_{s=0}^{n} \pi_s^* d_s + \pi_n^* \sum_{s=n+1}^{\infty} d_s \qquad [40]$$

Consideremos, ahora, el valor de la empresa definido según la siguiente expresión alternativa,

$$V_0^1 = \sum_{s=0}^{n} \pi_s d_s + \pi_n \sum_{s=n+1}^{\infty} d_s \qquad [41]$$

La esperanza de esta nueva definición coincide trivialmente con la anterior. Respecto a la varianza, es inmediato comprobar que viene dada por,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(V_0') = & \sum_{(s,r)=0}^{n} d_s d_r \sigma_{sr} \\ & + \sigma^2 \sum_{(s,r)=n+1}^{\infty} d_s d_r \\ & + 2 \sum_{\substack{s=(0,n) \\ r=(n+1,\infty)}} \sigma_{sn} d_s d_r \end{aligned} \qquad [42]$$

Si comparamos, ahora, esta expresión con la correspondiente para «V_0», comprobamos que el primer término es idéntico. Respecto al segundo, es inequívocamente mayor en el caso de V'_0, ya que ($\sigma^2 > \sigma_{sr}$) por la desigualdad de Schwartz. El único término que no queda definido *a priori* en la comparación analítica es el tercero, ya que no existe un signo previo para los valores ($\sigma_{sn} - \sigma_{sr}$). En conjunto, el signo de la diferencia $\text{Var}(V_0) - \text{Var}(V'_0)$ no está definido *a priori.* Sin embargo, no parece arriesgado suponer que la diferencia mencionada será pequeña para «n» suficientemente alto, al menos si «ξ» es un proceso suficientemente estacionario, en el sentido de que sus covarianzas no tardan en caer cuando la diferencia de tiempo aumenta. Además, parece en principio más probable, que $\text{Var}(V'_0)$ tienda a ser mayor. En conjunto, por tanto, es admisible suponer que substituyendo la definición del valor de la empresa V_0 por V'_0, no subestimaremos las bandas de confianza que, en su caso, calculemos. La ventaja de esta nueva definición es, obviamente, que depende de un número finito de elementos y es, por tanto, analizable analíticamente y por medio de simulaciones, si se desea.

El paso siguiente es, ahora, substituir el beneficio de cada período en función de las variables aleatorias originales que son el *input* básico del modelo. De acuerdo al desarrollo visto en el apartado I, podemos escribir el valor de la empresa como sigue,

$$V'_0 = \sum_{t=0}^{n} \left((Z_t - Z_t^*)' A (Z_t - Z_t^*) - Z'^*_t B Z_t^* \right) w_t \qquad [43]$$

donde,

$$w_t = \left| \begin{array}{l} d_t,\ t = 0, \ldots, (n-1) \\ \\ d_n + \sum_{s=n+1}^{\infty} d_s,\ t = n \end{array} \right.$$

que puede reescribirse, también, como:

$$V'_0 = K + \sum_{t=0}^{n} (Z_0 - Z^*)'_t\ H_t (Z - Z^*)_t \qquad [44]$$

donde «K» es una constante cuya definición es obvia, y $H_t = A \cdot w_t$. En definitiva hemos obtenido, al igual que para el caso del beneficio, que el valor de la empresa en un momento del tiempo puede expresarse como una suma de formas cuadráticas en variables normales y, por consiguiente, será también una forma cuadrática en dichas variables. Es decir,

$$V'_0 = K + (Z - Z^*)'\ H (Z - Z^*) \qquad [45]$$

donde,

$$(Z - Z^*)' = ((Z - Z^*)'_0, (Z - Z^*)'_1, \ldots, (Z - Z^*)'_n) \qquad [46]$$

La matriz «H» es fácilmente derivable, aunque no coincidirá con la matriz diagonal obtenida a partir de las matrices «H_t». Ello se debe a que habrá, en general, elementos comunes en los sucesivos vectores «Z_t», debido al carácter dinámico del modelo.

El hecho de que, tanto el beneficio de un periodo como el valor de la empresa en un momento del tiempo, puedan expresarse como formas cuadráticas en variables normales, tiene gran importancia para el cálculo de probabilidades como a continuación se discutirá.

Los métodos posibles para calcular probabilidades en el contexto de esta discusión son, al menos, los siguientes:

1.º Cálculo numérico exacto por medios informáticos.
2.º Cálculo por medio de simulaciones.
3.º Aplicación de los intervalos de Tchebycheff.
4.º Aproximación normal (basada en el cálculo analítico exacto de la varianza, como en el caso anterior).

El primer método se basa en la posibilidad de obtener exactamente la función de distribución por medio de la inversión numérica de la función característica. Este método ha sido desarrollado por Imhof y es apropiado para variables que puedan escribirse como formas cuadráticas en variables distribuidas normalmente. El método tiene la ventaja, sobre todos los demás, de proporcionar una solución exacta. Sin embargo, aunque la rutina de inversión de la función característica está escrita, es preciso preparar la entrada a esta rutina. En resumen, este método es exacto pero algo costoso de poner en práctica y exige, también, recursos informáticos (tiempo) ya que el cálculo, aunque exacto, es numérico, no analítico.

Una alternativa opuesta es la que presenta el segundo método, basado exclusivamente en métodos numéricos. La idea consiste en generar una muestra de números aleatorios, y simular el modelo con lo que obtendremos un valor para el valor de la empresa, «V_i». Repitiendo esta simulación «m» veces, podemos estimar la función de distribución de «V» y, en concreto, el intervalo de confianza correspondiente al 5 % de probabilidad. La fiabilidad de esta estimación está en relación directa, como es natural, con el número de replicaciones del ejercicio «m». En particular, y aplicando los resultados de la distribución binomial, la distribución del estimador de la probabilidad correspondiente a un intervalo viene dada por la expresión,

$$\hat{P} \sim N\left(P, \left(\frac{P(1-P)}{m} \right)^{1/2} \right) \qquad [47]$$

Este resultado implica que para estimar el intervalo correspondiente a un 95 % de probabilidad, 1.000 replicaciones del experimento dan un ajuste bastante preciso. El margen de error de la probabilidad asignada a dicho intervalo sería $\pm$ 1.7% con un 95% de probabilidad. Si se considera que después de unos 10 períodos el beneficio se estabiliza, sería necesario generar aproximadamente (5×10^4) números aleatorios para obtener estimaciones fiables de las probabilidades buscadas (ya que son 5 variables, en general, las que hay que simular por período, w, r, p, q, m). De todas formas, con estos números aleatorios podrían obtenerse, también, distribuciones para el beneficio en todos los períodos. La gran ventaja de este método es que es relativamente sencillo de poner en práctica, además de ofrecer una solución tan aproximada como se desee a la verdadera, en todo tipo de situaciones por complejas que sean. Su desventaja estriba, naturalmente, en el coste computacional implicado.

Los dos métodos siguientes requieren para su aplicación el cálculo analítico de la varianza de la variable cuya distribución de probabilidad se analiza. Debe subrayarse la conveniencia intrínseca de disponer de una solución analítica, en cualquier caso, sobre los métodos puros de simulación, aunque solamente sea porque la investigación sólo puede avanzar si se dispone de un armazón teórico, que en toda disciplina se construye lenta y progresivamente. El método más sencillo para obtener esta magnitud es operar con la función generadora de momentos, definida en general para una variable aleatoria «x» por la expresión siguiente,

$$M_x(u) = E \cdot e^{ux} \qquad [48]$$

Es fácil comprobar desarrollando el término $e^{(ux)}$ y tomando esperanzas que,

$$(\delta^M M_x(u)/\delta u)_{u=0} = E\, x^n \qquad [49]$$

En ocasiones, y debido a la forma de la función $M_x(u)$, es más sencillo operar con su logaritmo (concretamente en el caso que nos ocupa). No es difícil comprobar la siguiente relación,

$$(\delta^2 \lg (M_x(u))/\delta u)_{u=0} = E\, x^2 - (EX)^2 \qquad [50]$$

Es decir, la derivada segunda del logaritmo de $M(\cdot)$ respecto a «u», evaluada en $u = 0$, es precisamente la varianza de «x», que es la magnitud que estábamos buscando. Como la derivación analítica de cualquier función, por complicada que esta sea, no presenta dificultades especiales, el único problema pendiente es calcular la función $M(\cdot)$ para la variable, «valor de la empresa en un momento del tiempo». Dado que esta variable puede expresarse como una forma cuadrática en variables normales, este problema puede resolverse con facilidad (Apéndice 1).

Una vez calculada esta varianza, hay dos posibles vías a seguir. La primera es utilizar la acotación de Tchebycheff para obtener un cálculo exacto de la probabilidad máxima de que la variable analizada está fuera del intervalo considerado. Esta cota es válida para cualquier tipo de distribución pero el precio a pagar es, no sorprendentemente, su imprecisión (alternativamente, el intervalo que asegura un 95% de probabilidades es muy amplio).

La segunda vía, que proporciona intervalos mucho más ajustados, es suponer que la variable analizada sigue una ley de probabilidad normal. Para valorar la validez de este supuesto es necesario recordar, en primer lugar, una ley de los grandes números según la cual, la suma de un número de variables cuya distribución es diferente tiende a una normal, siempre que todas las varianzas sean finitas y ninguna de ellas domine a las restantes, en el sentido definido en el teorema al respecto (véase, por ejemplo, el capítulo 8 de H. Theil, Principles of Econometrics).

Si tenemos en cuenta, ahora, que el valor de la empresa se define, en principio, a partir de la suma de un número infinito de variables aleatorias, el teorema anterior parece aplicable. No obstante, como se aplica a cada una de ellas un factor de descuento que tiende a cero, las condiciones del mencionado teorema no parecen cumplirse estrictamente. Además, la definición operativa de «valor de la empresa», que se ha adoptado anteriormente para el cálculo de las probabilidades, solamente engloba un número finito de términos (n). De todas formas, cada variable «beneficio» está compuesta, a su vez, por una suma de varias variables aleatorias. En definitiva, aunque las condiciones requeridas para la aplicabilidad del teorema que garantiza una distribución normal para el valor de la empresa, no se cumplen estrictamente, tampoco parecen estar muy lejos de ello. Es conveniente observar, además, que en lo referente a aproximaciones de funciones de probabilidad el mayor problema suele estar en las colas, como muestran invariablemente todas las simulaciones. Esto quiere decir, por ejemplo, que pequeñas variaciones de probabilidad pueden traer consigo cambios importantes de los intervalos asociados. Por ejemplo, para pasar del 90 al 95 por ciento de probabilidad, puede llegar a ser necesario doblar el tamaño del intervalo en determinados casos. Pero otra manera de ver lo mismo es que para un intervalo dado, por ejemplo para el 95% de probabilidad de la distribución normal, la verdadera probabilidad representada por él estará, entre el 90 y el 98 por ciento. Es decir, el error cometido no es muy importante, a no ser que exista un interés específico en el 95% exactamente.

Dadas las consideraciones anteriores en su conjunto, parece bastante adecuado, por lo tanto, utilizar una aproximación normal para la variable aleatoria «valor de la empresa». En cualquier caso, pueden llevarse a cabo ejercicios previos en los que se contraste la validez de esta aproximación, mediante simulaciones que den una estimación muy ajustada de la distribución verdadera.

Como resumen de esta discusión puede decirse que las alternativas más interesantes para calcular las distribuciones son, en principio, la segunda y la cuarta (es decir, el método puro de simulación, y la aproximación normal con cálculo analítico de la varianza). En cualquier caso, la selección final deberá fundamentarse en la contrastación de todos los métodos, en cada situación concreta.

Antes de finalizar esta sección puede ser interesante presentar algunas simulaciones, con el objeto de clarificar los problemas y procedimientos discutidos, y su relevancia. Consideremos entonces y para simplificar, el beneficio de una empresa dado por

$$\pi = \pi^* + u - m \cdot M \tag{51}$$

donde π^* es la parte constante del beneficio, antes de descontar los costes energéticos, m es el precio de los *inputs* energéticos, y M la demanda de energía, dada a su vez por la expresión,

$$M = 0.6 + 0.7\, M_{-1} - 0.3m \tag{52}$$

de modo que la respuesta de M a variaciones en m es unitaria a largo plazo, pero relativamente lenta. Supondremos que m sigue un modelo del tipo

$$m = E(m) + u \quad ; \quad u - (0,\sigma_u) \tag{53}$$

y el valor actual queda definido a partir de la expresión,

$$V = \sum_{s=1}^{n} d_s\, \pi_s$$

$$d_s = (1+r)^s \quad , \quad s = 1 \ldots (n-1) \tag{54}$$

$$d_n = \frac{(1+r)^{-n}}{r}$$

Podríamos considerar explícitamente funciones de demanda para otros factores aparte de M, pero el tratamiento sería análogo. Puede ser más ilustrativo, por tanto, atenerse al ejemplo simplificado. Después de efectuar una serie de simulaciones con 1000 replicaciones cada una, y tomando $Em = 1$, $M_0 = 1$, $r = 15\%$, $n = 50$, $\sigma_u = 0.1\ \pi^*$ se han obtenido los resultados siguientes

π^*	σ_u	σ_V	V
1.2	0	0.023	1.33
1.2	0.5	0.14	1.33
2	0	0.11	6.66
2	0.5	0.19	6.66
4	0	0.32	20
4	0.5	0.36	20

Los resultados de este cuadro reflejan algunos hechos notables. En primer lugar, cuando el beneficio neto esperado es un 20% de los costes de la energía, el impacto de la volatilidad del precio de dicho *input* (σ_u) en la volatilidad final del valor de la empresa (σ_v) puede ser muy considerable (nótese que $E(m) \cdot M_0 = 1$, de modo que $\pi_e^* = 1.2 - 1 = 0.2$, en las dos primeras filas del cuadro, y similarmente para los siguientes). En segundo lugar, el impacto de la volatilidad del precio de la energía en la volatilidad final disminuye conforme el peso de los costes energéticos disminuye en relación al beneficio total. Por último, la volatilidad estimada para el valor de la empresa puede utilizarse para construir intervalos probabilísticos basados en la aproximación normal (o en la acotación de Tchebycheff).

4. Conclusión

Aunque los cálculos desarrollados en la sección anterior son complejos, no existen grandes dificultades para programarlos de forma general, de modo que esto no debería ser un obstáculo especial para aplicar los métodos sugeridos. El enfoque desarrollado en este trabajo posee la ventaja de suministrar un tratamiento unificado a los métodos que tratan de evaluar una empresa mediante modelos de simulación, y a los enfoques que se centran en la medición del riesgo de una empresa a través del estudio de los «ratios» significativos de su balance. Dentro de estos últimos, el más elaborado es el de Altman pero, como hemos visto, plantea problemas de estabilidad temporal en sus coeficientes. El modelo desarrollado en este trabajo permite resolver esta inestabilidad.

El número de cuestiones adicionales que pueden ser abordadas mediante el análisis desarrollado en este trabajo es más amplio. Algunas básicas son, por ejemplo, el cálculo de bandas de confianza en el momento presente y a lo largo del tiempo, para el beneficio y el valor de una empresa. Esto permite evaluar el riesgo de un activo de capital, en lo que se refiere a la volatilidad de su precio (no de su rendimiento), análisis que complementa el enfoque más tradicional orientado a determinar el precio correcto de un activo de capital, pero no la volatilidad de dicho precio. También se pueden obtener estimaciones sobre la evolución temporal de la probabilidad de quiebra, y efectuar simulaciones que permitan evaluar el efecto sobre esta probabilidad de políticas alternativas. Este análisis puede ser particularmente útil para diseñar políticas orientadas a la recuperación y saneamiento de empresas.

Aunque en situaciones de recuperación económica, el riesgo que quiebras empresariales no es tan grande, los métodos de este documento pueden utilizarse para estudiar las políticas que pueden conducir a una situación de prequiebra, y las políticas que alejan a una empresa de esta situación.

La aplicación de las ideas centrales de este trabajo puede simplificarse considerablemente, considerando funciones de demanda de factores simples, que dependan exclusivamente del volumen de ventas. Si se toman datos anuales, puede ser admisible eliminar la dinámica, lo que también simplifica enormemente los cálculos. En definitiva, estas simplificaciones son razonablemente admisibles, y pueden permitir la aplicación de los métodos de este trabajo a numerosos problemas prácticos con facilidad.

Finalmente, es necesario señalar que no es el objetivo de este trabajo negar la validez del enfoque de Altman y sus aplicaciones. Simplemente, se resuelven algunos problemas del mismo y se proporciona un método que, sin lugar a dudas, puede proporcionar respuestas definidas, aunque obviamente más complejas, a un mayor número de problemas.

Apéndice 1. La varianza de una forma cuadrática en variables normales

Consideremos una forma cuadrática en el vector «y» de variables normales, expresada en la forma siguiente,

$$z = y'Hy + Gy' \qquad [A.1]$$
$$y - N(m, \Omega)$$

donde $H = H'$, y H no tiene por qué ser no singular. El problema considerado en este apéndice es el cálculo de la varianza de «z». Para proceder a resolver este problema se adopta, aquí, el camino basado en el resultado siguiente,

$$(\delta^2 \lg M_z(u)/\delta\, u^2)_{u=0} = \sigma^2(z) \qquad [A.2]$$

donde,

$$M_z(u) = E(e^{uz}) \qquad [A.3]$$

El primer paso será, por consiguiente, obtener la función generatriz de momentos $M_z(u)$. Esta función se obtiene resolviendo la siguiente integral,

$$M_z(u) = E\, e^{uz}$$

$$= \int \exp(u(y'Hy + G'y))\,(2\pi)^{\frac{-n}{2}}\,|\Omega|^{\frac{-1}{2}}\,.$$

$$.\exp\left(-\frac{1}{2}(y-m)'\,\Omega^{-1}(y-m)\right) = \qquad [A.4]$$

$$= \int (2\pi)^{\frac{-n}{2}}|\Omega|^{\frac{-1}{2}}\exp(u(y'Hy + G'y) - \frac{1}{2}(y-m)'\,\Omega^{-1}(y-m))$$

Para resolver esta integral, el método más sencillo consiste en explotar el hecho de que el exponente es una forma cuadrática en «y», de manera que puede reescribirse como el exponente de una distribución normal; a partir de ahí, la integración es inmediata. Utilizando el resultado general para una forma cuadrática del tipo

$$z = y'Ay + By \qquad [A.5]$$

donde $A = A'$, $|A| \neq 0$, según el cual

$$z = (y - \eta)'\,A(y - \eta) + K \qquad [A.6]$$

donde,

$$K = -\eta' A \eta$$
$$\eta = -(1/2)\, A^{-1}\, B \qquad [A.7]$$

y después de operar en el exponente anterior, se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathit{\Phi} &= u((y'Hy) + G'y) - (1/2)\,(y - m)'\,\Omega^{-1}\,(y - m) \\ &= -\,(1/2)\,(y - \eta)'\,A\,(y - n) - (1/2)\,(K + m'\,\Omega^{-1}\,m) \end{aligned} \qquad [A.8]$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \Omega^{-1} - 2uH \\ \eta &= A^{-1}\,(Gu + \Omega^{-1}m) \\ K &= -\eta'\,A\eta \end{aligned} \qquad [A.9]$$

Podemos escribir, ahora, lo siguiente,

$$\begin{aligned} M_z(u) &= E\,\exp(\mathit{\Phi}) \\ &= \int (2\pi)^{-n/2}\,|\Omega|^{-1/2}\,|A|^{1/2}\,|A|^{-1/2}\,\exp(\mathit{\Phi}) \\ &= |\Omega|^{-1/2}\,|A|^{-1/2}\,\exp(-(1/2)(K + m'\Omega^{-1}m)) \\ &\quad * \int (2\pi)^{-n/2}\,|A|^{1/2}\,\exp(-(1/2)(y - \eta)'\,A\,(y - \eta)) \\ &= |\Omega|^{-1/2}\,|A|^{-1/2}\,\exp(-(1/2)(K + m'\Omega^{-1}m)) \end{aligned} \qquad [A.10]$$

ya que la segunda línea de la expresión inmediatamente anterior es la integral de una distribución normal que es, por tanto, la unidad.

Tomando logaritmos obtenemos, ahora, la función generadora de cumulantes, cuya segunda derivada respecto a «u» evaluada en $u = 0$, nos dará la magnitud buscada, es decir, la varianza de «z». Tenemos, entonces, lo siguiente,

$$\lg(M_z(u)) = -(1/2)\,(\lg|\Omega| + m'\Omega^{-1}m) - (1/2)\,(\lg|A| + K) \qquad [A.11]$$

Un resultado útil de derivación matricial, para obtener el resultado buscado es el siguiente,

$$\delta \lg A/\delta u = tr\,(A^{-1}\,\delta A/\delta u) \qquad [A.12]$$

siendo A una matriz simétrica. Derivando, ahora, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \lg M_z(u)/\delta u &= -(1/2)\,(tr\,A^{-1}\,(\delta A/\delta u) + \delta K/\delta u) \\ &= -(1/2)\,(tr A^{-1}\,(-2)\,H + \delta K/\delta u) \end{aligned} \qquad [A.13]$$

puesto que a partir de la definición de A, tenemos,

$$\delta A/\delta u = -\,2H \qquad [A.14]$$

La segunda derivada estará dada por,

$$\delta^2 \lg M_z(u)/\delta u^2 = -(1/2)\,(tr\,A^{-1} 2\,H\,A^{-1}\,(-2)\,H + \delta^2\,K/\delta u^2) \qquad [A.15]$$

puesto que,

$$d(A^{-1}) = -A^{-1}(dA)A^{-1} \qquad [A.16]$$

El único término que queda por hallar es $\delta^2 K/\delta u^2$. Debido a la complejidad de los cálculos algebraicos implicados es conveniente diseñar un procedimiento simplificador para el cálculo de esta derivada. Dadas las definiciones anteriores de «K» y «u» tenemos lo siguiente,

$$K = -(u\,G' + m'\Omega^{-1})\,A^{-1}(Gu + \Omega^{-1}m) = -\lambda'\,A^{-1}\,\lambda \qquad [A.17]$$

de modo que,

$$\begin{aligned}\delta K/\delta u &= -2(\delta\lambda/\delta u)'\,A^{-1}\,\lambda + \lambda' A^{-1}(\delta A/\delta u)\,A^{-1}\,\lambda \\ &= -2(G'A^{-1}\,\lambda + \lambda'\,A^{-1}\,H\,A^{-1}\,A)\end{aligned} \qquad [A.18]$$

A partir de esta expresión puede obtenerse la derivada segunda de forma más sistemática que con métodos alternativos. Entonces,

$$\delta^2 K/\delta u^2 = -2(G'(-1)A^{-1}(-2)HA^{-1}\lambda + G'A^{-1}G + (\lambda' A^{-1}H^{-1}\lambda)/\delta u) \qquad [A.19]$$

El último término de este paréntesis cuadrado puede obtenerse de manera simplificada como sigue,

$$\begin{aligned}\delta(\lambda' A^{-1})/\delta u &= (\delta\lambda'/\delta u)\,A^{-1} + \lambda'(\delta A^{-1}/\delta u) \\ &= G'A^{-1} + 2\,\lambda'\,A^{-1}\,H\,A^{-1}\end{aligned} \qquad [A.20]$$

Por otra parte tenemos que,

$$\begin{aligned}\delta((\lambda' A^{-1})\,H(A^{-1}\,\lambda))/\delta u &= 2(\delta(\lambda' A^{-1})/\delta u)\cdot H\,A^{-1}\,\lambda) \\ &= 2\,G'A^{-1}HA^{-1}\lambda + 4\,\lambda' A^{-1}HA^{-1}HA^{-1}\lambda\end{aligned} \qquad [A.21]$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$\begin{aligned}A(u=0) &= \Omega^{-1} \\ \lambda(u=0) &= \Omega^{-1}m\end{aligned} \qquad [A.22]$$

obtenemos finalmente por substitución, para $u = 0$,

$$\begin{aligned}\delta^2 K/\delta u^2 = &-2(2\,G'\,\Omega\,H\,\Omega\,\Omega^{-1}\,m + \;G'\,\Omega\,G \\ &+ 2\,G'\,\Omega\,H\,\Omega\,\Omega^{-1}\,m + \\ &+ 4\,m'\,\Omega^{-1}\,\Omega\,H\,\Omega\,\Omega^{-1}\,m) \\ = &-2\,(4(m'\,H\,\Omega\,H\,m + G'\,\Omega\,H\,m) + G'\,\Omega\,G)\end{aligned} \qquad [A.23]$$

Utilizando, ahora, un resultado para formas cuadráticas obtenido anteriormente, podemos escribir lo siguiente,

$$m'H\,\Omega\,H\,m + G'\,\Omega\,H\,m = (2\,m'H + G')\,\Omega(2\,H\,m + G)\,(1/4) - G'\,\Omega\,G \qquad [A.24]$$

de modo que la derivada buscada queda escrita en forma completa como sigue,

$$\delta^2 K/\delta u^2 = -2((2m'\,H + G')\,\Omega(2\,H\,m + \sigma) \qquad [A.25]$$

Sustituyendo ahora esta expresión en la segunda derivada de lg $M_z(u)$ y evaluando el resto de los términos en $u = 0$ obtenemos, finalmente, la solución buscada que está dada por la expresión siguiente,

$$\delta^2 \lg M_z(u)/\delta u^2 = 2\,\mathrm{tr}(\Omega H \Omega H) + (2m'H + G')\,\Omega\,(2Hm + G) \qquad [A.26]$$

Resumiendo el resultado de este apéndice podemos escribir:

$$\begin{aligned} & y - N(m, \Omega) \\ & Z = y'Hy + G'y \qquad (H = H') \\ & \mathrm{Var}(Z) = 2\,\mathrm{tr}(\Omega H \Omega H) + (2m'H + G')\,\Omega\,(2Hm + G) \end{aligned} \qquad [A.27]$$

El problema siguiente, y último, para el cálculo de esta expresión es obtener la matriz Ω, correspondiente a la matriz de varianzas y covarianzas del vector $z' = (z_1', z_2', ..., z_T')$, problema que se aborda a continuación. Para ello comenzaremos por considerar un caso sencillo en el que se cumple,

$$V_0 = d_0(z_0' A z_0) + d_1(z_1' A z_1) \qquad [A.28]$$

es decir, el valor de una empresa está definido por el beneficio de dos períodos, descontados a sus respectivas tasas. Supondremos, además, que la ecuación que determina el beneficio no es dinámica, en otras palabras, que el beneficio está determinado únicamente por valores del período. Finalmente, el modelo que determina las variables 'z' en este ejemplo será estático. Es decir,

$$E(z\, z_s') = \begin{cases} \Sigma & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases} \qquad [A.29]$$

Tenemos entonces que,

$$\begin{aligned} V_0 &= x' H x \\ x' &= (z_0' \, z_1') \end{aligned}$$

$$H = \begin{bmatrix} Ad_0 & 0 \\ 0 & Ad_1 \end{bmatrix} \qquad [A.30]$$

$$\mathrm{Var}(X) = (I_2 \otimes \Sigma)$$

Esta última matriz es la matriz Ω buscada. El cálculo de la varianza de 'V_0' es, ahora, sencillo. Por ejemplo,

$$\mathrm{tr}(\Omega\, H\, \Omega\, H) = (d_0^2 + d_1^2)\,\mathrm{tr}(\Sigma\, A\, \Sigma\, A) \qquad [A.31]$$

y los restantes términos se calculan, también, con facilidad. En el caso de modelos estimados con datos anuales, los supuestos de la discusión anterior pueden no ser excesivamente fuertes. Por otra parte, modelos trimestrales con retardos no excesivamente largos pueden anualizarse. Por ejemplo, el siguiente modelo trimestral,

$$Y_t = \alpha\, Y_{t-1} + \beta\, X_t + \varepsilon_t \qquad [A.32]$$

puede aproximarse por el modelo anual

$$Y_t = (\beta/(1-\alpha))\, X_t + u_t \quad ; \quad V(u_t) = \sigma_\varepsilon^2/(1-\alpha^2) \qquad [A.33]$$

siempre que «α» no se alto, de modo que casi todo el ajuste se lleve a cabo en el período de un año.

Supongamos, ahora, que el modelo de determinación del beneficio es dinámico y que, además, las variables «z_t» siguen un proceso autorregresivo del tipo AR(1), dado por,

$$z_t = R\, z_{t-1} + \varepsilon_t \qquad [A.34]$$

El valor de la empresa dado por la expresión ($z'Hz$), no será ya fácilmente descomponible (la matriz H será algo más complicada que en el caso anterior, al existir elementos comunes en los vectores z_0 y z_1). Para hallar la matriz de covarianzas de $z' = (z_0', z_1')$, consideremos las expresiones,

$$\begin{aligned} z_1 &= \varepsilon_1 + R\,\varepsilon_0 + R^2 z_{-1} \\ z_0 &= \varepsilon_0 + R\, z_{-1} \end{aligned} \qquad [A.35]$$

de modo que,

$$\begin{aligned} E(z_1 z_1' \mid z_{-1}) &= \Sigma + R\,\Sigma R' \\ E(z_0 z_0' \mid z_{-1}) &= \Sigma \\ E(z_1 z_0' \mid z_{-1}) &= R\,\Sigma \end{aligned} \qquad [A.36]$$

con lo que obtenemos,

$$\Omega = \mathrm{Var}\,(z\, z'_{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma & R\,\Sigma \\ \Sigma R' & \Sigma + R\Sigma R' \end{bmatrix} \qquad [A.37]$$

El ejemplo puede generalizarse de un modo obvio, al caso en el que el valor de la empresa esté definido en función de varios períodos, y el proceso que determina las variables «z» sea del tipo autorregresivo de cualquier orden. El problema algebraico y computacional es, no obstante, bastante considerable para un caso general de este tipo y es probable que, en estas condiciones, sea más práctico obtener las probabilidades por medio de simulaciones. En cualquier caso, este es uno de los puntos que deberían estudiarse con más detalle en el desarrollo del proyecto de investigación propuesto en este trabajo.

Apéndice 2. Análisis de los casos de la sección 3

2.º Este caso puede presentarse cuando, por necesidades econométricas, el modelo haya sido especificado en primeras diferencias. El beneficio, entonces, queda definido a partir de la siguiente expresión,

$$\pi = p \cdot Q - w\,L_{-1} + \delta_0\,w^2 - \delta_0\,w\,w_{-1} + \delta_2\,QW + \delta_1\,w\,Q_{-1} - \\ - \alpha(m\,Q) - \beta_1(r\,Q) + (\beta_1 - \gamma_1)Q + (\gamma_2 - \beta_1)Y \qquad [A.38]$$

Nuevamente es inmediato que el beneficio queda expresado como una forma cuadrática en variables normales. La única dificultad que presenta este caso es que el modelo para el nivel del empleo no es estacionario, es decir,

$$L = L_{-1} - \delta_0 - \Delta w + \delta_1\,\Delta Q + \xi \qquad [A.39]$$

de forma que la varianza de «L» tiende a crecer sin límite. Pero como el modelo se simula a partir de un momento «T», podemos calcular las probabilidades condicionalmente a ese momento, de modo que para una simulación que cubra un período finito las varianzas de «L» serán finitas. En el caso en el que se considere la distribución conjunta para los beneficios de más de un período, será preciso tener en cuenta que las variables «L_{T+S}» poseen una varianza diferente para cada «s».

3.º En modelos estimados a partir de datos de sección cruzada, en ocasiones es importante la no linealidad. Por este motivo, puede ocurrir que la especificación de una determinada ecuación esté en logaritmos, y que sea bastante diferente de una especificación en niveles. Para reducir la complejidad del problema de cálculo de probabilidades, podemos efectuar la siguiente aproximación. Sea el modelo en logaritmos:

$$\mathrm{Lg}(Y) = \alpha\,\mathrm{Lg}(X) + \xi \qquad [A.40]$$

donde «ξ» es un error de tipo ruido blanco. Tomando primeras diferencias obtenemos la expresión:

$$\Delta\mathrm{Lg}(Y) = \alpha\,\Delta\,\mathrm{Lg}(X) + \Delta\xi \qquad [A.41]$$

En esta última expresión, «α» es una aproximación discreta a la elasticidad de «Y» con respecto a «X» y «$\Delta\xi$» es una media móvil estacionaria de orden uno. Podemos escribir, en general,

$$\begin{aligned} \Delta\,\mathrm{Lg}\,(Y) &\simeq \mathrm{dLg}(Y) \\ &= \mathrm{d}Y/Y \\ &\simeq \Delta Y/Y \end{aligned} \qquad [A.42]$$

y tomando la media muestral de Y y X (Y^*, X^*), podemos escribir la aproximación,

$$\begin{aligned} \Delta Y &\simeq (\alpha\,Y^*/X^*)\,\Delta X + Y^*\,(\Delta\xi) \qquad [A.43] \\ &= \beta\,\Delta X + u \end{aligned}$$

siendo «u» una media móvil de orden uno y con desviación stándard de la innovación igual a ($Y^*\,\sigma_\varepsilon$). De este modo, obtenemos un modelo en primeras diferencias que ya ha sido analizado en el apartado anterior. El hecho de que «u» esté correlacionado serialmente no supone una dificultad teórica especial: simplemente, la matriz de varianzas y covarianzas de las variables normales que definen el beneficio, será más complicada.

4.º En ocasiones pueden coincidir los motivos que aconsejan especificaciones empíricas de los tipos señalados en los dos apartados anteriores de forma combinada. En este caso tendríamos la siguiente demanda de empleo.

$$\Delta \operatorname{Lg}(L) = -\delta_0 \Delta \operatorname{Lg}(w) + \delta_1 \Delta \operatorname{Lg}(Q) + \xi \qquad [A.44]$$

que puede aproximarse en la forma siguiente,

$$\Delta L \simeq -(\delta_0 L^*/w^*) \Delta w + (\delta_1 L^*/Q^*) + L^* \xi \qquad [A.45]$$

siendo L^*, W^* y Q^* los valores muestrales medios de las variables correspondientes sin asterisco. La justificación de esta aproximación se ha presentado en el apartado anterior.

Hasta ahora hemos considerado el efecto de diferentes especificaciones funcionales de las diversas ecuaciones de demanda que entran a formar parte de la definición de «beneficio distribuido», en la especificación estocástica de esta última variable. Puede ocurrir, también, que las variables (W, P, Q, m, r) hayan sido modelizadas empíricamente siguiendo algunos de los modelos anteriores que han sido discutidos en detalle. Esta posibilidad no afecta conceptualmente a los desarrollos anteriores ni a la especificación final del beneficio distribuido, como es fácilmente comprobable. Tan sólo supone una mayor complejidad algebraica.

Referencias

Altman, E. (1968): «Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy», *The Journal of Finance, núm. 4*, págs. 589-609.

Altman, E.; Haldeman, R. y Narayanan, P. (1977): «Zeta analysis: a new model to identify bankruptcy risk of corporation», *Journal of Banking and Finance, núm. 1*, págs. 29-54.

Hamermesh, O. (1988): «Plant closings and the value of the firm», *The Review of Economics and Statistics, núm. 3*, págs. 580-586.

Martínez Mongay, C.; Navarro, M. C. y Sanz, F. (1988): «Selección y explotación de los sistemas de alarma y prevención de quiebra», *Jornadas de Economía Industrial*, Fundación Empresa Pública.

Rodríguez Fernández, J. M. (1987): «Crisis en los bancos privados españoles: un modelo logit», *Investigaciones Económicas* (Suplemento), págs. 59-65.

Rodríguez Fernández, J. M. (1988): «La rentabilidad financiera de las cajas de ahorro españolas: modelos empíricos alternativos», *Jornadas de Economía Industrial*, Fundación Empresa Pública.

Rojo, L. A. (1981): *Renta precios y balance de pagos*, 6.ª edición, *Alianza Universidad*, Madrid.

Rosen, S. (1974): «Hedonic Prices and Implicit Markets», *Journal of Political Economy, núm. 82*, págs. 34-55.

Sargent, T. (1987): *Macroeconomic Theory*, University of Pennsylvania, Philadelphia.

Varian, H. (1984): *Microeconomic Analysis*, Second Edition, *Norton and Company, Inc.* New York.

Abstract

Starting with the work of Altman, simple empirical models based on discriminant analysis have been estimated in several forms, in order to identify the determinants of the bankraptev risk of corporations. This paper derives analytically and from first principles, a theoretical model for that risk. The assumptiens and the statistical work are carefully spelled and developped. It is also shown that the Altman model can be interpreted as a special case of the more general solution put formard in this paper.

Recepción del original, noviembre de 1990
Versión final, febrero de 1991