Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XIV, n.º 3 (1990), págs. 385-405.

ASPECTOS METODOLOGICOS RELACIONADOS CON LA MEDICION, EN TERMINOS ABSOLUTOS, DE LA PRODUCTIVIDAD TOTAL DE LOS FACTORES

Emili GRIFELL I TATJE*

Universidad Autónoma de Barcelona

Este trabajo propone una metodología para la medición, en términos discretos y absolutos, de la productividad total de los factores. Aunque se basa en la teoría neoclásica de la producción no se desarrolla a partir de la definición de un determinado número índice. Se especifican las hipótesis necesarias y se analizan las distintas relaciones primal-dual. La metodología presentada será utilizada para el análisis de determinadas líneas de investigación en el área de la economía de la empresa.

1. Introducción

En el área de la economía de la empresa han aparecido líneas de investigación que tienen en común el concepto de productividad total de los factores (TFP). Es necesario citar a dos: primera, los trabajos dirigidos a conseguir una descomposición, entre diferentes efectos explicativos, de las variaciones observadas en el beneficio empresarial. Entre tales efectos se encuentra la productividad total de los factores. Dentro de esta línea de investigación han de situarse las propuestas de Eldor y Sudit (1981), Miller (1983, 1985), Myro (1983), Kurosawa (1975, 1979), Genescà y Grifell (1986), Verges y Genescà (1983); segunda, el denominado «Excedente de Productividad Global» o «Surplus de Productividad» muy cercana a la anterior, pues tiene como finalidad contemplar el reparto del excedente generado a través de la actividad empresarial. Bajo determinadas hipótesis el excedente generado tiene como única causa explicativa el TFP. El «Surplus de Productividad» se entiende como un medio para analizar la empresa no únicamente como generadora de riqueza, sino también como distribuidora de ésta entre los distintos grupos humanos que participan, ya sea directa o indirectamente, en su actividad. Autores como Cea (1982), Courbois y Temple (1975), Fernández (1983), Maroto (1980, 1981, 1982), Rodes (1980), Vassal (1972,a,b) entre otros, han de situarse en esta línea de investigación. Verges (1982) hizo una crítica a este

* Agradezco al Dr. Enric Genescà i Garrigosa, Catedrático de la Universidad Autónoma de Barcelona, los comentarios y sugerencias que ha efectuado en el curso de la elaboración de este trabajo. También estoy en deuda con el evaluador anónimo por las indicaciones, siempre constructivas, realizadas. Naturalmente, los posibles errores son de mi exclusiva responsabilidad.

planteamiento que, a nuestro entender, aún sigue vigente en muchos aspectos.

Dada la anterior situación surgen, principalmente, tres preguntas: primera, ¿todas las alternativas de explicación de la modificación en el beneficio son igual de válidas?, ¿qué propuestas son teóricamente superiores a las demás?; segunda, ¿es posible conseguir otra descomposición de las variaciones en el beneficio teóricamente mejor?; tercera, ¿puede realizarse una reformulación del Excedente de Productividad Global de manera que se superen los aspectos de crítica que aún permanecen vigentes? Las respuestas a estas preguntas exige disponer de una estructura de análisis inequívocamente definida. La finalidad del presente trabajo es el de proporcionar el referido marco analítico. Proponemos una metodología, utilizando la teoría neoclásica de la producción, que nos permite medir, en términos discretos y absolutos, la evolución del TFP. No estudiamos el caso de la empresa regulada que presenta particularidades específicas, aunque la literatura principalmente se centra en incorporar a la medición del TFP el planteamiento de Averch y Johnson (1962). El enfoque que presentamos no está supeditado a la elección de un determinado número índice, aunque pueden relacionarse con facilidad ambos planteamientos, Grifell (1988). Somos cuidadosos en la definición de las hipótesis sobre las que se basa su desarrollo. Algunas de ellas son las normales en el marco de la teoría neoclásica de la empresa, pero aún así hemos creído necesario especificarlas. Justamente será la relajación, en futuros trabajos, de algunos de estos supuestos lo que nos permitirá readaptar la metodología propuesta, obteniendo de este modo respuesta a las preguntas anteriormente formuladas. En concreto, la existencia de beneficios debe de interpretarse como un incumplimiento del supuesto que la empresa se encuentra situada en un contexto a largo plazo.

En el apartado dos, asumimos las hipótesis necesarias para que el cambio técnico sea la única causa explicativa de los avances productivos. En el tres proponemos la metodología para medir el TFP en términos discretos y absolutos. En el cuatro estudiamos, dentro del planteamiento presentado, las diferentes relaciones primal - dual que pueden producirse. Este último apartado tiene un especial interés para el futuro estudio del «Surplus de Productividad», ya que éste debe de interpretarse como la igualdad que se produce, en la medición del TFP y, bajo determinadas hipótesis, entre las funciones de costes y de producción.

2. La teoría de la producción como punto de partida

La productividad total de los factores es, simplemente, una medición que nos relaciona la producción con todos los *inputs* utilizados para su elaboración:

$$TFP = \frac{Q}{X}$$

donde Q nos expresa el nivel de producción y X la totalidad de los factores que han intervenido en la elaboración del anterior. X ha de ser función de un número finito de *inputs,* igual que Q ha de serlo para los *outputs,* cuando la unidad productiva ofrece más de un producto. El interés se centra en estudiar la evolución que experimenta la anterior relación. El simple concepto definido presenta cierta complejidad teórica cuando queremos precisar las causas de su modificación. En las próximas páginas nosotros asociamos la noción de TFP con el de cambio técnico. En esta situación la productividad se relaciona con los desplazamientos de la isocuanta. Hay una tecnología mejor, o se introducen mejoras en alguna de las existentes de modo que las nuevas posibilidades de producción representan un ahorro de factores por unidad de *output* respecto a la alternativa mejor que había disponible. La expresión «mejora tecnológica» debe interpretarse en un sentido amplio, así nuevos esquemas o sistemas organizativos quedan incluidos en la anterior. En este trabajo también asumimos la interpretación anterior.

En el desarrollo que sigue aceptamos que la unidad productiva es eficiente desde un punto de vista técnico. Esto significa que no se produce un despilfarro de recursos, de modo que la empresa se encuentra situada sobre la isocuanta indicada. Ahora, estamos en condiciones de enunciar la primera hipótesis. De momento consideramos un solo *output.*

1. $\{x_j(t); j = 1, 2, ..., n\}$ nos expresa el conjunto óptimo de recursos en cualquier momento de tiempo, para realizar el nivel de producción $Y(t)$. Dado el anterior conjunto de factores el nivel de producción $Y(t)$ es el máximo posible. De un modo alternativo, dado el *output* $Y(t)$, las cantidades de *inputs* anteriormente definidas son las mínimas necesarias para producirlo. El referido nivel de producción no es posible para cualquier subconjunto de factores.

Existe la posibilidad que a medida que transcurre el tiempo, las cantidades mínimas de factores, para conseguir un nivel dado de *output,* disminuyan (aumenten). De otro modo, para un mismo conjunto de *inputs* situado en momentos distintos de tiempo, obtenemos una cantidad de producción máxima diferente. Podemos enunciar la próxima condición.

2. La relación entre el máximo *output,* en un momento cualquiera, dadas unas cantidades de *inputs* para producirlo: $x_j, j = 1, 2, ..., n,$ depende de una variable tecnológica, la cual se considera que se encuentra correctamente representada por el tiempo. Esta variable es expresada por la letra t.

A continuación precisamos la hipótesis tercera que sitúa la empresa en un entorno adecuado. Una vez enunciados los supuestos 1, 2 y 3 podemos hacerlo para un cuarto que los relaciona.

3. La unidad productiva se encuentra situada en un contexto a largo plazo y competencia perfecta. En esta situación todos los factores son variables.

4. La función de producción nos relaciona el *output,* los diferentes factores y la variable tecnológica, t. Esta función es continua y positiva. Tenemos:

$$Y(t) = f(x_j(t), t : j = 1, 2, ..., n\} \quad [1]$$

se considera a Solow (1957) el pionero de este planteamiento. Algunos autores recuerdan que Tibergen, en los años cuarenta, había propuesto una formulación parecida. Este planteamiento ha tenido una gran aceptación en la literatura. La diferenciación de [1] respecto a *t*, seguida de la manipulación correcta de las expresiones obtenidas[1], nos proporciona una explicación de la variación en el *output*. Las modificaciones en la producción se descomponen en dos términos: el primero, nos cuantifica los cambios relacionados con la intensidad de aplicación de los *inputs*. La precisión de una nueva hipótesis nos permite una mayor explicación de este término:

5. La empresa se comporta racionalmente minimizando los costes

La empresa realiza una asignación de recursos que corresponde al punto en que la isocoste es tangente a la isocuanta. Bajo los supuestos enunciados se cumple que el valor del producto marginal de cada factor es igual a su precio. En este contexto los rendimientos a escala, expresados por la elasticidad del *output* respecto a los costes totales, aparecen como un ponderador de la expresión que nos mide las variaciones en las cantidades de factores (ver nota 1).

El segundo término explicativo de la modificación en el *output*, ha de interpretarse como una alteración en la producción debida a cambios en la tecnología, puesto que esta expresión se encuentra relacionada con la variable tecnológica, *t*. Este término nos mide la variación en la producción que tiene como origen el cambio técnico. Incorpora innovaciones que permiten una

[1] Si derivamos [1] respecto a *t*, y la expresión resultante la dividimos por $Y(t)$, manipulando de un modo correcto cada uno de los términos:

$$\frac{dY(t)/dt}{Y(t)} = \Sigma_j \frac{x_j(t)}{Y(t)} \cdot \frac{\delta f}{\delta x_j(t)} \cdot \frac{dx_j(t)}{dt} \cdot \frac{1}{x_j(t)} + \frac{\delta f}{\delta t} \cdot \frac{1}{Y(t)}$$

de la condición 5 se desprende:

$$\frac{\delta f}{\delta x_j(t)} = \frac{w_j(t)}{(\delta C(t)/\delta Y(t))} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

donde $w_j(t)$, es el precio unitario del *input* j en el momento *t*, y $\delta C/\delta Y$ el coste marginal. Si convenimos:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = \dot{x}_j \qquad j = 1, 2, ..., n; \qquad \frac{dY(t)}{dt} = \dot{Y}$$

tenemos que:

$$\frac{\dot{Y}}{Y(t)} = \Sigma_j \frac{w_j(t) \cdot x_j(t)}{Y(t) \cdot (\delta C(t)/\delta Y(t))} \quad \frac{\dot{x}_j}{x_j(t)} + \frac{\delta f/\delta t}{Y(t)}$$

si multiplicamos la expresión $Y(t) \cdot (\delta C(t)/\delta Y(t))$ por $C(t)/C(t)$ la relación anterior nos queda:

$$\frac{\dot{Y}}{Y(t)} = \varepsilon cy^{-1} \cdot \Sigma_i \frac{w_j(t) \cdot x_j(t)}{C(t)} \quad \frac{\dot{x}_j}{x_j(t)} + \frac{\delta f/\delta t}{Y(t)}$$

mayor cantidad de *output* por unidad de factor; nos define un desplazamiento de la función de producción. La expresión descrita es de hecho un residual. El residual, nos cuantifica la modificación en el *output* que tiene su origen, aceptando la interpretación de Solow, en el cambio técnico, también denominado progreso técnico. Este se considera «no incorporado» o «exógeno» al no realizarse ninguna distinción entre las distintas generaciones de capital y al suponer que el anterior aumenta la eficiencia de los factores productivos de una manera global. En un próximo párrafo realizamos algunas precisiones sobre este término y vemos la relación que guarda con la productividad total de los factores.

El impacto del cambio técnico también puede medirse a través de la alteración en los costes. Esta posibilidad se debe al fenómeno de la dualidad. Dada una función de producción que nos describe la tecnología podemos definir su dual, la cual contiene la misma información que la de producción. El lector interesado en una exposición precisa y completa de la teoría de la dualidad puede ver a Diewert (1974). La variable *t,* está incluida en la función de costes y sigue representando a la tecnología. El razonamiento que se realiza respecto a la función de costes es, en términos parecidos, el dado a conocer para la función de producción. En esta nueva situación las variaciones en los costes viene explicada por tres componentes: modificaciones en la producción que se encuentran ponderadas por un término relacionado con los rendimientos de escala (la inversa de la elasticidad del *output* respecto al coste total); alteraciones en los precios de los factores y cambio técnico [2]. Este último viene cuantificado por el residual de la función de costes. Ohta (1974) demuestra que, de un modo general, el resultado conseguido a través del residual de la función de producción y de costes no debe coincidir. De hecho, el residual de la función de producción es igual a la de costes ponderada por el término que nos

[2] Dada la función de costes:

$$C(t) = g(Y(t), w_j(t), t : j = 1, 2, ..., \text{n})$$

tenemos:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\delta C(t)}{\delta Y(t)} \quad \frac{dY(t)}{dt} + \Sigma_j \frac{\delta C(t)}{\delta w_j(t)} \quad \frac{dw_j}{dt} + \frac{\delta C(t)}{\delta t}$$

y la aplicación del lema de Shephard nos permite la igualdad siguiente:

$$\frac{\delta C(t)}{\delta w_j(t)} = x_j(t) \qquad j = 1, 2, ..., n$$

adicionalmente, si convenimos que:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \dot{C}(t) \qquad \frac{dw_j(t)}{dt} = \dot{w}_j(t) \qquad j = 1, 2, ..., n$$

tenemos:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{\delta \ln C(t)}{\delta \ln Y(t)} \quad \frac{\dot{Y}}{Y(t)} + \Sigma_j \frac{w_j(t) \cdot x_j(t)}{C(t)} \quad \frac{\dot{w}_j}{w_j(t)} + \frac{\delta C(t)/\delta t}{C(t)}$$

mide los rendimientos a escala. De donde se desprende que lo teóricamente correcto sería utilizar la función de costes en vez de la función de producción. Naturalmente, bajo la hipótesis de rendimientos constantes ambos residuales nos proporcionan el mismo resultado. Este aspecto ya había sido destacado con anterioridad por Jorgenson y Griliches (1967). Denny, Fuss y Waverman (1981) establecen la relación entre las variaciones de la productividad total de los factores y el residual de la función de costes[3]. De esta expresión se deduce que en una situación de rendimientos constantes la evolución del TFP está únicamente explicada por el cambio técnico, el cual puede medirse tanto a partir de una función de producción como de costes. Los resultados alcanzados para el caso de un solo *output* son extrapolables a un contexto multiproducto. El lector interesado en su desarrollo puede ver Usher (1980).

3. Definición de los conceptos que se utilizan en este trabajo

Caves, Christensen y Swanson (1978) dejan claro que, contrariamente a lo que había afirmado Diewert (1976), en la obtención del residual en una situación multiproducto no es necesario asumir la hipótesis de separabilidad, entre *outputs* y *inputs*, sobre la función implícita de producción. Desgraciadamente, para conseguir los objetivos fijados por este trabajo, debe hacerse, puesto que de otra manera nos encontraríamos en un grado de operatividad muy restringido. Así pues, debemos enunciar la condición siguiente:

6. Dada la función implícita de producción.

$$F(Y_i(t), x_j(t), t : i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) = 0$$

asumimos la hipótesis de separabilidad homothética aditiva entre *outputs* y *inputs*. La función anterior de producción puede reescribirse:

$$Q(Y_i(t) : i = 1, 2, ..., m) = X^*(x_j(t), t : j = 1, 2, ..., n)$$

nosotros utilizaremos, en las próximas líneas, $Q(Y(t))$ como una notación más compacta del primer término de la igualdad. Adicionalmente consideramos que la tecnología y los *inputs* son separables, es decir, que existe un $X(x_j(t) : j = 1, 2, ..., n)$, alternativamente $X(x(t))$, el cual es independiente del nivel de la tecnología. Bajo esta circunstancia:

$$Q(Y(t)) = T(t) \cdot X(x(t)) \qquad [2]$$

Cuando se razona sobre [2] no sólo se asume que el cambio técnico no es incorporado, sino que éste es neutral en el sentido de Hicks. En términos generales, el cambio técnico es denominado «neutral» cuando deja inaltera-

$$\frac{\dot{\text{TFP}}}{\text{TFP}} = -\frac{\delta \ln C(t)}{\delta t} + (1 - \varepsilon_{CY})\frac{\dot{Y}}{Y(t)}$$

das determinadas relaciones entre las diferentes variables económicas[4]. La neutralidad de Hicks nos dice que el cambio técnico no altera la relación marginal de sustitución en un coeficiente constante entre ambos *inputs.* O sea, dada una combinación entre dos factores, la mejora tecnológica no modifica su relación técnica marginal de sustitución. Esto quiere decir, simplemente, que las nuevas innovaciones han aumentado por igual la eficiencia de todos los *inputs,* de modo que se obtiene más *output* con el mismo nivel de factores. Alternativamente, para realizar una producción idéntica se necesita menor cantidad de *inputs.* Naturalmente, las proporciones en estos últimos no se habrán modificado. Lo expuesto es equivalente a decir que la isocuanta se ha desplazado paralelamente en todos los puntos. Por otro lado es muy sencillo relacionar las variaciones de $T(t)$ con el residual de la función implícita de producción. Nosotros, en el próximo apartado veremos con más detalle este aspecto. La próxima hipótesis se refiere a los rendimientos de escala.

7. Las funciones $Q(Y_i\colon i = 1, 2, ..., m)$ y $X(x_j\colon j = 1, 2, ..., n)$, lo mismo, $Q(Y)$ y $X(x)$ son, respectivamente, homogéneas de grado no (linealmente homogéneas). Se asume la hipótesis de rendimientos constantes de escala, bajo cuya condición, como hemos visto, las variaciones en la productividad total de los factores serán explicadas por el cambio técnico. Si λ es una constante positiva, el conjunto $\{Y_{\lambda i}, i = 1, 2, ..., m\}$ será la producción resultante de aplicar λ a $\{x_j, j = 1, 2, ..., n\}$. Tenemos:

$$Q(Y_\lambda) = X(\lambda \cdot x) \qquad [3]$$

donde $Q(Y_\lambda)$ es la expresión simplificada de $Q(Y_{\lambda i} : i = 1, 2, ..., m)$. Observemos que se cumplen las dos igualdades siguientes: primera, $Q(Y_\lambda) = Q(\lambda \cdot Y) = \lambda \cdot Q(Y)$; segunda, $X(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot X(x)$.

[4] Las neutralidades más conocidas, y también las más utilizadas, son, junto a la de Hicks, la de Harrod y Solow. Las tres son mutuamente compatibles, esto significa que existe una función de producción que representa los tres conceptos a la vez. Se han definido otros tipos de neutralidad como son la «labour-combining» y el «capital-combining». Dirijo al lector interesado en el estudio de éstos, así como en la «compatibilidad», al trabajo de Gehrig (1980).

Neutralitat de Harrod: la productividad marginal del capital es constante a un coeficiente *output*-capital constante.

$$\frac{\delta Y}{\delta K} = H(Y/K)$$

Neutralitat de Solow: la productividad marginal del trabajo es constante a un coeficiente *output*-trabajo constante.

$$\frac{\delta Y}{\delta L} = H(Y/L)$$

Definición Gehrig (1980, pág. 7): dos tipos de progreso técnico neutral son llamados compatibles si existe una función de producción, la cual representa ambos conceptos. De otro modo son llamados incompatibles.

Teorema Gehrig (1980, pág. 17): entre los tipos de neutralidad sólo el progreso técnico neutral de Hicks, Harrod y Solow son mutuamente compatibles.

Analizaremos ahora la variación observada en la cantidad de *output* producida, en un momento cualquiera, respecto a un período definido como base o cero. La modificación anterior, bajo las hipótesis vistas, dependerá:

a) de los incrementos en la cantidad de factores productivos empleados, que se traduce en un movimiento a lo largo de la función de producción, no en un desplazamiento.

b) de la productividad total de los factores, la cual tiene su origen en las mejoras tecnológicas. Los avances productivos implican un desplazamiento hacia arriba de la función de producción.

El interés se centra, utilizando las hipótesis 6 y 7, en separar claramente, en esta situación discreta, estos dos efectos. A fin de simplificar inicialmente la exposición, consideremos un único *output*. Respecto al período inicial, tendremos:

$$Y^{o} = T(t^{o}) \cdot X(x_j^{o}, j = 1, 2, ..., n) \qquad [4]$$

donde asumimos que $T(t^{o}) = 1$; esto simplemente quiere decir que el nivel tecnológico del momento cero es considerado como el de referencia. Así pues, cualquier mejoría introducida en un período posterior al inicial se traducirá en un valor de $T(t)$ mayor que uno. Igual que antes $X(x^{o})$ nos describe la función de *inputs* de la expresión [4].

Para realizar la separación arriba señalada se razona a partir de la secuencia de acontecimientos siguiente: primero, tienen lugar las variaciones en las cantidades de *inputs,* no se produce el cambio técnico. Las modificaciones señaladas incorporan los procesos de sustitución. Segundo, se produce el avance o retroceso productivo. Nos centramos, en las próximas líneas, en el efecto de una utilización de factores distinta con ausencia de variaciones en el TFP y, posteriormente, en la medida de este último.

Comenzamos a partir de una situación simplificada caracterizada por un comportamiento restrictivo de los precios de los factores. Estos no se modifican entre el intervalo de tiempo comprendido entre cero y t; en el caso que lo hagan no varían sus proporciones relativas respectivas. El nivel tecnológico corresponde al definido como el de referencia, o momento inicial. Se cumple, bajo las condiciones enunciadas, $x_j^{t} = \lambda \cdot x_j^{o}, j = 1, 2, ..., n$. En esta situación la función de *inputs* es, $X(x_j^{t} : j = 1, 2, ..., n)$, alternativamente, $X(x^{t})$. De 7 se desprende:

$$Y_{\lambda}^{t} = X(x^{t}) = \lambda \cdot X(x^{o}) \qquad [5]$$

Y_{λ}^{t} nos expresa el nivel de producción que obtendría la empresa en $t,$ en ausencia de cambio técnico, ya que cualquier modificación entre Y_{λ}^{t} y Y^{o} se debe a la variación en la cantidad de factores. Teniendo presente [3] y [4] la relación anterior es igual a $Y_{\lambda}^{t} = \lambda \cdot Y^{o}$. Observamos que [5], si aplicamos el teorema de Euler a $X(x^{o})$, nos permite afirmar:

$$X(x^{o}) = \Sigma_j \frac{\delta X}{\delta x_j^{o}} x_j^{o}$$

definimos a p^o como el precio del *output* en el período base. De la condición 5:

$$p^o \frac{\delta X}{\delta x_j^o} = w_j^o \qquad j = 1, 2, ..., n$$

[5] es igual a: $$p^o \cdot Y_\lambda^t = \Sigma_j \, w_j^o \cdot x_j^t \qquad [6]$$

En la circunstancia que los precios de los factores se modifiquen y no se conserven las proporciones relativas entre ellos, se producirá un proceso de sustitución entre los diferentes *inputs*. En este caso, el conjunto de factores: $\hat{x}^t{}_j, j = 1, 2, ..., n$ será el óptimo para producir el *output* Y_λ^t y se cumplirá, al menos para algún j, $\hat{x}_j^t \neq \lambda \cdot x_j^o$. [5] será, bajo las circunstancias descritas:

$$Y_\lambda^t = X(\hat{x}_j^t: \; j = 1, 2, ..., n) \qquad [7]$$

igual que antes la función de *inputs* la representamos por, $X(\hat{x}^t)$. Ahora, cuando entre ambos períodos de tiempo considerados se den variaciones en la productividad total de los factores, tendremos, recordando la condición 6:

$$Y^t = T(t) \cdot X(\hat{x}^t) \qquad [8]$$

donde aplicando [7] se desprende: $Y^t = T(t) \cdot Y_\lambda^t$ [9]

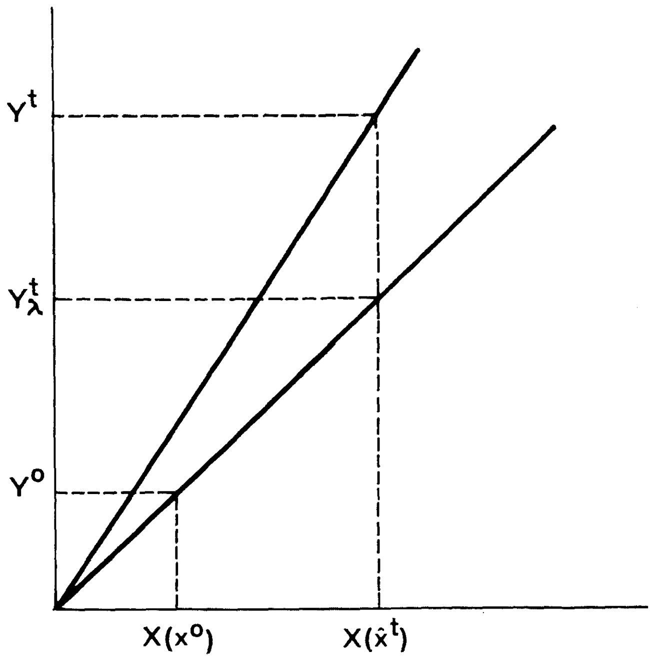

Gráfico 1

observemos que cuando la tecnología permanece constante, entonces se da la igualdad $Y^t = Y^t_\lambda$, y cualquier modificación en la producción queda explicada por las variaciones en las cantidades de *inputs*. Del mismo modo, cualquier desigualdad entre Y^t y Y^t_λ será exclusivamente debida, como nos demuestra [9], a la evolución de la productividad total de los factores. El Gráfico 1, nos recoge lo que se ha dicho hasta el momento donde, como claramente queda reflejado, el crecimiento de la producción entre ambos momentos de tiempo, es decir, entre Y^t y Y^o son separables en dos partes: la primera, que corresponde a $Y^t_\lambda - Y^o$, que atribuimos a un incremento en las cantidades utilizadas de factores productivos, hecho que conlleva un desplazamiento según la senda de la función de producción del momento inicial. Esta situación queda recogida por [7] y, como un caso especial, por [5]; mientras que la segunda, $Y^t - Y^t_\lambda$, tiene como único origen la variación positiva en el TFP, observamos como provoca el desplazamiento de la función de producción. Esta situación queda reflejada en las expresiones [8] y [9]. Por tanto, del planteamiento presentado hasta el momento se deduce que las variaciones en la productividad total de los factores, entre dos momentos de tiempo, están cuantificadas por el coeficiente:

$$\mathrm{TFP}_{o,t} = \frac{T(t)}{T(t^o)} = \frac{Y^t}{Y^t_\lambda} \qquad [10]$$

o alternativamente de [8] y [4]:

$$\mathrm{TFP}_{o,t} = \frac{\dfrac{Y^t}{Y^o}}{\dfrac{X(\hat{x}^t)}{X(x^o)}}$$

donde en el caso que los precios de los factores se mantengan constantes [8] es igual a: $Y^t = T(t) \cdot X(x^t)$. La aplicación sobre esta igualdad y sobre [4] de la condición de que el valor del producto marginal de cada factor es igual al precio, nos permite deducir:

$$\mathrm{TFP}_{o,t} = \frac{\dfrac{p^o \cdot Y^t}{p^o \cdot Y^o}}{\dfrac{\sum_j w_j^o \cdot x_j^t}{\sum_j w_j^o \cdot x_j^o}}$$

El anterior es un caso particular y corresponde a un número índice Laspeyres. Pero ahora debemos darnos cuenta de las posibilidades que presenta [10], el cual es un planteamiento alternativo a la utilización de números índices. Lo único que hace [10] es relacionar la producción observada en t con la que se habría obtenido en ausencia de cambio técnico. Fijémonos que Y^t_λ siguiendo este enfoque basado en la función de producción, es fácil de determinar. Para hacerlo especificamos una forma concreta de función de producción que, para simplificar, suponemos que es una Cobb-Douglas con dos factores productivos. La función de producción correspondiente al momento inicial vendrá dada por:

$$Y^o = C^o \cdot L_0^{\alpha} \cdot K_o^{(1-\alpha)}$$

la cantidad de factores productivos utilizados en el momento *t*, será: L^t, K^t. En consecuencia, el *output* teórico, es decir, el que obtendríamos en *t* en ausencia de cambio técnico sería el resultante de aplicar sobre las cantidades de factores consumidos en *t* los parámetros estimados de la función de producción correspondiente al momento cero. Nos queda:

$$Y_{\lambda}^{t} = C^o \cdot L_t^{\alpha} \cdot K_t^{(1-\alpha)} \qquad [11]$$

mientras que la función de producción en *t*, vendrá expresada por:

$$Y^t = C^t \cdot L_t^{\alpha} \cdot K_t^{(1-\alpha)} \qquad [12]$$

y considerando que α no se ha modificado entre los dos períodos, obtenemos de [11] y [12]:

$$\text{TFP}_{o,t} = \frac{Y^t}{Y_{\lambda}^{t}} = \frac{C^t}{C^o}$$

$\text{TFP}_{o,t} - 1$, alternativamente $T(t) - 1$ de [10], constituye la aproximación discreta al residual de Solow (1957) que se encuentra cuantificado por $(Y^t - Y_{\lambda}^{t})/Y_{\lambda}^{t}$.

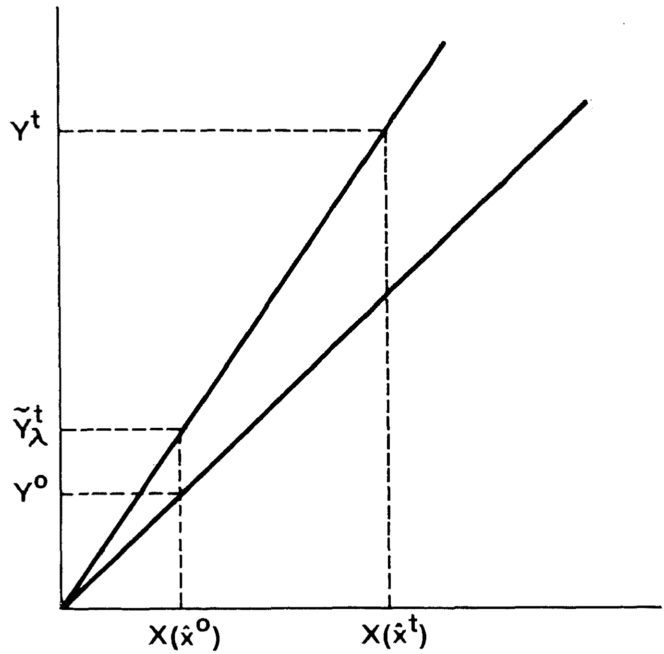

Gráfico 2

Tal como hemos visto, el enfoque presentado no solamente nos proporciona un procedimiento para medir el TFP sino también, un método para explicar las variaciones observadas en el *output*. Recordemos, que la diferencia entre, $Y^t - Y^o$, quedaba descompuesta entre estos dos componentes $(Y^t - Y_\lambda^t)$ y $(Y_\lambda^t - Y^o)$, los cuales ya han sido comentados con anterioridad. La bibliografía, ya citada al inicio de este trabajo, que propone una descomposición explicativa de las variaciones observadas en el beneficio empresarial, se basa en la anterior separación. Nosotros, en las páginas que siguen, realizaremos propuestas de medición del TFP, en términos discretos y absolutos, apoyándonos en el planteamiento presentado. Por tanto, nos situamos en la línea de investigación marcada por la bibliografía, comportamiento que es coherente con los objetivos últimos perseguidos y que ya han sido citados en el apartado primero.

La descomposición explicativa presentada de la diferencia entre Y^t y Y^o no es la única posible. Como observamos en el Gráfico 2, la cuantificación del TFP también puede realizarse mediante la comparación de $\tilde{Y}_\lambda^t$ y Y^o [5]. Se introduce una nueva tecnología que, con los mismos niveles de *inputs* del momento inicial, permite una mayor producción. En este punto debemos contemplar la posibilidad que sean los propios procesos de sustitución los que induzcan a la adopción de innovaciones. Hay ciertas evidencias históricas que parecen confirmar este supuesto; ver, por ejemplo, Jorgenson (1984). De hecho, el planteamiento de Solow se basa en la relación entre $\tilde{Y}_\lambda^t$ y Y^o de modo que el residual, $T(t) - 1$ es igual a $(\tilde{Y}_\lambda^t - Y^o)/Y^o$ [6]. Naturalmente, este nuevo enfoque

[5] La secuencia consiste, ahora, en introducir una nueva tecnología que, con los mismos niveles de *inputs* del momento inicial, permite una mayor producción. Definimos a $\{\hat{x}_j^o : j = 1, 2, ..., n\}$ o, alternativamente, $X(\hat{x}^o)$ como el conjunto de *inputs* del momento inicial para producir Y^o a los precios vigentes en t. $\tilde{Y}_\lambda^t$ vendrá definido por:

$$\tilde{Y}_\lambda^t = T(t) \cdot X(\hat{x}^o)$$

que es equivalente a: $\tilde{Y}_\lambda^t = T(t) \cdot Y^o$ $\quad (a)$

en este contexto, las variaciones en las cantidades incorporadas de factores tienen lugar sobre la nueva tecnología de manera que la aplicación del supuesto 5 sobre (a) nos proporciona la igualdad:

$$Y^t = T(t) \cdot \lambda \cdot X(\hat{x}^o)$$

o, alternativamente: $Y^t = \lambda \cdot \tilde{Y}_\lambda^t$.

Ahora, podemos repetir el desarrollo presentado entre las expresiones [10] y [12] pero referido a este nuevo contexto. Previamente recordemos:

$$Y^o = C^o \cdot L_o^\alpha \cdot K_o^{(1-\alpha)} \qquad (b)$$

la función de producción de t vendrá expresada por [12]. Ahora podemos definir a:

$$\tilde{Y}_\lambda^t = C^t \cdot L_o^\alpha \cdot K_o^{(1-\alpha)} \qquad (c)$$

aplicando (b) y (c) en (a) obtenemos la misma definición de $TFP_{o,t} = C^t/C^o$.

[6] El lector que desee una explicación detallada del por qué el residual de Solow se basa en la comparación de $\tilde{Y}_\lambda^t$ y Y^o puede dirigirse a la primera parte del trabajo de Martínez y

nos proporciona una descomposición diferente de la variación observada en el *output*, ver Gráfico 2. Ahora, la diferencia entre $Y^t - \tilde{Y}^o$ vendrá explicada por: $(Y^t - \tilde{Y}^t_\lambda) + (\tilde{Y}^t_\lambda - Y^o)$ donde, $Y^t - \tilde{Y}^t_\lambda$ nos cuantifica la modificación en la producción atribuida a aumentos en las cantidades de *inputs*, mientras que, el segundo término, $\tilde{Y}^t_\lambda - Y^o$ debe interpretarse como las mejoras en la producción motivadas por los avances en el TFP. Tal como ya hemos mencionado, en las próximas páginas, nos centraremos en la medición de la productividad por medio de la comparación entre Y^t y Y^t_λ, dejando para un futuro la otra posibilidad apuntada. La extensión de este planteamiento al caso de m productos se basa en realizar, a partir de la relación [2], la separación siguiente:

$$Y^t_i = T(t) \cdot X_i(\hat{x}^t_{ji} : j = 1, 2, ..., n) \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad [13]$$

donde: $\Sigma_i \hat{x}_{ji} = \hat{x}_j = j = 1, 2, ..., n$; lo que significa que los costes comunes a dos o más productos pueden asignarse entre ellos. Fijémonos que el cambio técnico, entre los dos momentos de tiempo, expresado por $T(t)$ afecta por igual a cada uno de los *outputs*.

4. Análisis de las diferentes aproximaciones discretas posibles a la igualdad primal-dual

Las páginas que siguen están fundamentadas en la exposición realizada en el subapartado anterior. Como hemos visto se ha definido un concepto de *output* teórico, expresado por el símbolo Y_λ, el cual correspondería a la producción que obtendría la unidad productiva en la circunstancia que actuase con la misma eficiencia que el período precedente. La diferencia: $Y^t - Y^t_\lambda$, nos valora el impacto de las modificaciones en la productividad total de los factores en términos absolutos. La exposición que sigue tiene como objeto estudiar las diferentes relaciones primal-dual que pueden darse cuando, utilizando la metodología propuesta anteriormente, deseamos valorar las variaciones en la productividad total de los factores en términos absolutos. En el desarrollo que sigue a estas líneas asumimos que los precios de los factores pueden experimentar variación. Suponemos que el nuevo conjunto de precios, vigente en t, cumple estas dos condiciones: a) los precios de t son los del inicio del período; b) en la circunstancia que sean diferentes, con referencia a los precios vigentes en el momento base o cero, sólo incorpora alzas, ya sea para cada uno de sus componentes o únicamente para alguno de ellos. En este contexto, la hipótesis (a) es habitual, la (b) es necesaria exclusivamente por motivos de simplificación analítica, ya que si consideramos que algunos precios pueden disminuir al mismo tiempo que otros aumentar, la dificultad se centra en determinar la dirección que ha tomado el coste unitario de t respecto al del momento ini-

Pascual (1987). Nosotros en este pie de página únicamente queremos hacer notar que el término, en la expresión de Solow, que nos mide las variaciones en las cantidades de *inputs* (ver nota 1) constituye una aproximación a $(Y^t - \tilde{Y}^t_\lambda)/Y^o$. La sustracción del anterior importe a la modificación total del *output* $(Y^t - Y^o)/Y^o$, nos proporciona la expresión que nos cuantifica el residual $(\tilde{Y}^t_\lambda - Y^o)/Y^o = T(t) - 1$.

cial. Fuera de este aspecto de cálculo, y conocida la relación entre los dos costes, asumir uno u otro comportamiento no implica ninguna modificación formal en el análisis posterior.

4.1. El dual: la medición del TFP basada en la disminución de costes

Dado el punto de partida anterior, consideramos que la empresa, es decir, el ente responsable de la unidad productiva, decide, al principio de t, un nivel teórico de producción que se expresa por Y_λ^t. Esta decisión suponemos que no se modifica durante todo el período. De hecho, Y_λ^t nos expresa el nivel de producción realizado en t, en la circunstancia que el TFP no experimente variación, es decir, que el nivel de eficiencia conseguido al final del momento cero permanezca inalterado durante t. $\{\hat{x}_j^t, j = 1, ..., n\}$ nos expresa la asignación óptima de factores para producir Y_λ^t, a los precios vigentes en t, tal como habíamos visto anteriormente.

Con un razonamiento parecido tendremos que $\{\hat{x}_j^0, j = 1, ..., n\}$ es el mejor conjunto de *inputs*, a los precios vigentes en t, para producir el nivel de *output* del momento inicial, Y^0. Las diferencias que se produzcan entre $\{x_j^0, j = 1, ..., \imath\}$ y el conjunto anterior serán consecuencia de los procesos de sustitución entre los diferentes factores como respuesta a las modificaciones en sus precios respectivos. Asumimos: $Y_\lambda^t = \lambda \cdot Y^0$, $\{\hat{x}^t = \lambda \cdot \hat{x}^0, j = 1, ..., n\}$ lo que implica decir que los productos son los mismos *i* el «mix» de *inputs*, si se modifica, únicamente lo hace como consecuencia de los cambios relativos en los precios.

Dados los supuestos de partida anteriores, podemos definir $\hat{c}^t$ como el coste unitario que habría obtenido la empresa en ausencia de cambio técnico. Este se encuentra dado por:

$$\hat{c}^t = \frac{\sum_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t}{Y_\lambda^t} \qquad [14]$$

Es necesario destacar que $\hat{c}^t$ no incorpora ninguna variación que tenga su origen en la productividad total de los factores, únicamente considera el aumento en los precios de los *inputs*. Naturalmente, la diferencia entre $\hat{c}^t$ y c^0 será consecuencia exclusiva de la citada alteración en los precios.

La medición basada en los costes conlleva que las cantidades óptimas de factores para producir Y_λ^t han disminuido como respuesta a los avances en el TFP. Como el cambio técnico es neutral, en el sentido de Hicks, las proporciones relativas entre los diferentes elementos del conjunto $\{\hat{x}_j^t, j = 1, ..., n\}$ no se han modificado como consecuencia de haber conseguido niveles de eficiencia más elevados. Si durante el período se da un crecimiento productivo, entonces el conjunto de *inputs* que optimiza el *output* Y_λ^t, es $\{\hat{x}_\lambda^t/T(t), j = 1, ..., n\}$ y, por tanto, su coste unitario:

$$c^t = \frac{\sum_j w_j^t \cdot (\hat{x}_j^t/T(t))}{Y_\lambda^t} \qquad [15]$$

c^t es el coste unitario observado, mientras que $\hat{c}^t$ es el teórico, mejor dicho, el esperado, ya que sería el que se obtendría con el mismo nivel de eficiencia que el período precedente. En la circunstancia que los avances productivos sean positivos: $c^t < \hat{c}^t$. La cuantificación del impacto que ha tenido para la empresa las mejoras introducidas vendrá dada por la diferencia entre [14] y [15]:

$$\hat{c}^t - c^t = \frac{\Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t}{Y_\lambda^t} - \frac{\Sigma_j w_j^t \cdot (\hat{x}_j^t / T(t))}{Y_\lambda^t}$$

o lo que es lo mismo:

$$\hat{c}^t - c^t = \frac{\Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t}{Y_\lambda^t} \left(1 - \frac{1}{T(t)} \right) \qquad [16]$$

la cual se puede expresar en términos de variación en los costes totales:

$$(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y_\lambda^t = \Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t - \Sigma_j w_j^t \cdot (\hat{x}_j^t / T(t)) \qquad [17]$$

que proviene del producto entre la producción llevada a cabo en el momento *t*, y la reducción en el coste unitario que se ha dado durante el período debido a los avances en el TFP. El modo alternativo de cuantificar el impacto de las modificaciones productivas se basa en los incrementos de los ingresos que esta última ocasiona. Este aspecto es el que desarrollamos en el subapartado siguiente.

4.2. El primal: la medición del TFP basada en el aumento de los ingresos

Una medición basada en el primal de la función de costes requiere definir un comportamiento diferente por parte de la empresa, el cual estaría dirigido a desplazar las variaciones de eficiencia sobre la producción. El *output* de t es función de la evolución que experimenta, en el período, la productividad. Naturalmente, cuando el TFP se mantenga inalterado, entonces la producción de este período será Y_λ^t. En este planteamiento el conjunto de factores $\{\hat{x}^t, j = 1, ..., n\}$ no se modifica, se supone que permanece constante durante t.

El output adicionalmente obtenido, debido a las mejoras introducidas, vendrá cuantificado por la diferencia: $Y^t - Y_\lambda^t$, la cual será valorada al precio de venta del producto en t que, recordémoslo, en este contexto es igual al coste unitario. Se cumplirá, recordando la definición de c^t dada por [15] y $Y^t = T(t) \cdot Y_\lambda^t$:

$$(Y^t - Y_\lambda^t) \cdot c^t = \Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t \left(1 - \frac{1}{T(t)} \right)$$

alternativamente:

$$(Y^t - Y_\lambda^t) \cdot c^t = \Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t - \Sigma_j w_j^t (\hat{x}_j^t / T(t)) \qquad [18]$$

Destacamos que la utilización del precio del producto para cuantificar la variación, $Y^t - Y^t_\lambda$, resulta inadecuada cuando la empresa se encuentra situada en un entorno donde hay ganancias, es decir, beneficios por encima de la remuneración del capital. En un próximo artículo veremos con mayor atención el aspecto apuntado. De [17] y [18] se desprende:

$$(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y^t_\lambda = (Y^t - Y^t_\lambda) \cdot c^t \qquad [19]$$

que nos establece, bajo los comportamientos ya descritos, la relación primal-dual en términos absolutos. La generalización de este resultado a *m outputs* es inmediata si recordamos: primero, que los costes comunes a uno o más productos pueden asignarse entre ellos; segundo, el cambio técnico afecta por igual a todos los *outputs*. Vendrá dada por:

$$\Sigma_i(\hat{c}^t_i - c^t_i) \cdot Y^t_{\lambda i} = \Sigma_i(Y^t_i - Y^t_{\lambda i}) \cdot c^t_i \qquad [20]$$

fijémonos que [20] no nos refleja la única relación dual-primal posible. Estas son analizadas en los próximos subapartados.

4.3. Una igualdad alternativa

Como $T(t) = Y^t/Y^t_\lambda$, recordemos $T(t^o) = 1$, si aplicamos esta relación a [16] nos queda:

$$(\hat{c}^t - c^t) = \frac{\Sigma_j w^t_j \cdot \hat{x}^t_j}{Y^t_\lambda} \left(\frac{Y^t - Y^t_\lambda}{Y^t} \right)$$

alternativamente:

$$(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y^t = \frac{\Sigma_j w^t_j \cdot \hat{x}^t_j}{Y^t_\lambda} (Y^t - Y^t_\lambda) \qquad [21]$$

de donde se desprende, aplicando [14], que:

$$(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y^t = (Y^t - Y^t_\lambda) \cdot \hat{c}^t \qquad [22]$$

la misma igualdad se obtiene de [18]. Para el caso más general de *m outputs* la relación anterior será:

$$\Sigma_i(\hat{c}^t_i - c^t_i) \cdot Y^t_i = \Sigma_i(Y^t_i - Y^t_{\lambda i}) \cdot \hat{c}^t_i \qquad [23]$$

La hipótesis subyacente, o necesaria, para conseguir la igualdad anterior es fácil de averiguar. Lo único que se supone, razonado sobre el dual, es que para obtener el nivel de producción Y^t, las cantidades teóricas óptimas de factores son $\{\tilde{\tilde{x}}^t_j, j = 1, ..., n\}$, cumpliéndose que: $\{\tilde{\tilde{x}}^t_j = T(t) \cdot \hat{x}^t_j, j = 1, ..., n$. En otras palabras, se cree que con el conjunto de *inputs* anterior el nivel de producción conseguido en t será Y^t. Dentro de este planteamiento el conjunto $\{\hat{x}^t_j, j = 1, ..., n\}$ será el observado, es decir, nos da las cantidades de factores realmente consumidas en la producción, puesto que tienen deducidos los ahorros que en los *inputs* posibilitan los adelantos productivos. Naturalmente, se cumplirá que: $Y^t = \lambda^* \cdot Y^o$, siendo $\lambda^* = T(t) \cdot \lambda$

Con el supuesto anterior, tenemos que el coste unitario que se habría obtenido en la circunstancia que el TFP no hubiese experimentado variación:

$$\text{coste unitario teórico} = \frac{\Sigma_i w_j^t \cdot \tilde{\tilde{x}}_j^t}{Y^t} = \frac{T(t) \cdot \Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t}{T(t) \cdot Y_\lambda^t} \qquad [24]$$

que coincide con $\hat{c}^t$. El coste unitario observado, es decir, el obtenido realmente por la unidad productiva, el cual incorpora las modificaciones productivas, será el mismo que c^t, ya que se encuentra definido por:

$$c^t = \frac{\Sigma_j w_j^t \cdot \tilde{\tilde{x}}_j^t / T(t)}{Y^t} \qquad [25]$$

en consecuencia, la diferencia en los costes totales vendrá dada por: $(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y^t$. Naturalmente, partiendo de la relación anterior y teniendo presente [24] y [25] llegamos fácilmente a las expresiones [21] y [22].

La relación [23] presenta una ventaja respecto a [20] en el sentido que el conjunto de factores productivos, los cuales llevan deducidos los avances en el TFP, es el $\{\hat{x}_j^t, j = 1, 2, ..., n\}$. Este hecho tiene algunas ventajas en la exposición, si bien en futuros trabajos se utilizará tanto la igualdad [23] como la [20].

4.4. *Relaciones primal-dual que se dan con comportamientos restrictivos de los precios de los factores*

En las próximas líneas analizaremos dos casos de variaciones en los precios de los *inputs*. Como veremos, cada uno de ellos constituye una readaptación de las relaciones analíticas, [19] y [22], definidas anteriormente.

a) VARIACIONES ESPECIALES EN LOS PRECIOS DE LOS FACTORES

Como demostraremos a continuación hay ciertas igualdades primal-dual que únicamente se pueden obtener definiendo una realidad restrictiva. La que veremos a continuación se caracteriza por el hecho que los precios de los *inputs* se incrementan en la misma proporción que el TFP. De [21] se desprende:

$$\hat{c}^t - c^t = \frac{\Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t}{Y_\lambda^t} \quad \frac{1}{T(t)} \quad \frac{(Y^t - Y_\lambda^t)}{Y_\lambda^t} \qquad [26]$$

recordemos que con rendimientos constantes de escala se cumple:

primero: $\hat{x}_j^t = \lambda \cdot \hat{x}_j^o$ para cualquier j
segundo: $Y_\lambda^t = \lambda \cdot Y^o$ donde λ es una constante positiva.

[26] teniendo en cuenta esto, nos queda:

$$\hat{c}^t - c^t = \frac{\Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^o}{Y^o} \cdot \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{(Y^t - Y_\lambda^t)}{Y_\lambda^t} \qquad [27]$$

en la circunstancia que los precios de los *inputs* aumenten en la misma proporción que la productividad total de los factores, es decir, $w_j^t = T(t) \cdot w_j^o, j = 1, 2, ..., n$, como la función de costes es homogénea de grado cero respecto a los precios y como cada uno de ellos, en el momento t, queda multiplicado por la misma constante, el valor de la cual es el crecimiento experimentado en el TFP, la demanda de cada uno de los factores productivos no experimenta variación durante el período, de modo que tendremos: $\hat{x}_j^o = x_j^o, j = 1, 2, ..., n$. Esto nos permite expresar [27]:

$$\hat{c}^t - c^t = \frac{T(t) \cdot \Sigma_j w_j^o \cdot x_j^o}{Y^o} \cdot \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{(Y^t - Y_\lambda^t)}{Y_\lambda^t}$$

en este contexto el coste unitario del momento cero (c^o) y el de t, (c^t) coincidirán[7]. Se desprende:

$$(\hat{c}^t - c^o) \cdot Y_\lambda^t = (Y^t - Y_\lambda^t) \cdot c^o \qquad [28]$$

Tal como habíamos enunciado, la igualdad primal-dual únicamente se cumple en una realidad muy restrictiva que está caracterizada por el hecho que la variación en los precios de los *inputs* debe coincidir con la del TFP. Como en este caso, el coste unitario del momento cero y el de t coinciden, [28] nos describe la misma relación que la [19] pero, ahora, adaptada a la situación planteada. Naturalmente, la [22] será:

$$(\hat{c}^t - c^o) \cdot Y^t = (Y^t - Y_\lambda^t) \cdot \hat{c}^t \qquad [29]$$

donde $\hat{c}^t$ incorpora las alteraciones descritas en los precios de los *inputs*.

b) Constancia en los precios de los factores

Una correlación primal-dual posible es:

$$(c^o - c^t) \cdot Y^t = (Y^t - Y_\lambda^t) \cdot c^o \qquad [30]$$

como demostraremos a continuación, esto únicamente se da en un contexto caracterizado por la constancia en los precios de los factores, $w_j^t = w_j^o, j = 1, 2, ..., n$. Bajo esta hipótesis se cumplirá, siguiendo el mismo razonamiento pre-

[7] Se cumple la igualdad siguiente:

$$c^t = \frac{\Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t}{Y^t} = \frac{\lambda \cdot T(t) \cdot \Sigma_j w_j^o \cdot x_j^o}{\lambda \cdot T(t) \cdot Y^o} = c^o$$

sentado en el subapartado anterior, que $\hat{x}_j^t = \lambda \cdot x_j^o, j = 1, 2, ..., n$. Por lo tanto, la relación [21] puede reescribirse:

$$(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y^t = (Y^t - Y_\lambda^t) \frac{\Sigma_j w_j^o \cdot x_j^o}{y^o}$$

de donde se desprende directamente [30] si nos fijamos que en el supuesto de constancia en los precios de los *inputs,* tenemos que: $\hat{c}^t = c^o$ · [30] constituye la adaptación de la relación descrita en [22] a esta nueva situación. Al mismo tiempo hemos de darnos cuenta que [19] es:

$$(c^o - c^t) \cdot Y_\lambda^t = (Y^t - Y_\lambda^t) \cdot c^t$$

donde c^t incorpora únicamente las modificaciones en el TFP. Se pueden plantear otras relaciones primal-dual, pero estas son teóricamente incorrectas[8].

5. Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto una metodología para la medición de la productividad total de los factores, la cual se basa en la teoría neoclásica de la producción. Las propuestas realizadas no se desarrollan a partir de la especificación de un determinado número índice, planteamiento mayoritariamente seguido en las investigaciones realizadas en el área de la economía de la empresa. Se ha utilizado un concepto teórico relacionado con la isocuanta que permite no solamente la utilización de números índice, sino de cualquier desarrollo que tenga como base dicho concepto.

La valoración de las variaciones productivas, medidas en términos discretos y absolutos, nos ha permitido estudiar la relación primal-dual que se produce bajo el planteamiento presentado. Aquí es posible la obtención de otra igual-

[8] Las relaciones primal-dual teóricamente incorrecta son dos:
primera: $(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y_\lambda^t = (Y^t - Y_\lambda^t) \cdot \hat{c}^t$ *(a)*
segunda: $(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y^t = (Y^t - Y_\lambda^t) \cdot c^t$ *(b)*

Respecto a la primera de ellas, de [26] se deduce:

$$(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y_\lambda^t = (Y^t - Y_\lambda^t) \cdot \hat{c}^t \cdot \frac{1}{T(t)}$$

donde de la relación anterior se deduce que únicamente se cumplirá *(a)* si $T(t) = 1$, que es el caso que el TFP entre los dos períodos no experimente variación. Situación en la cual: $Y^t = Y_\lambda^t$, $\hat{c}^t = c^t$. En cualquier otra circunstancia no se dará, lo cual descarta *(a)* como una expresión adecuada. Para el segundo caso, recordando:

$$(\hat{c}^t - c^t) \cdot Y^t = \frac{\Sigma_j w_j^t \cdot \hat{x}_j^t}{Y_\lambda^t} (Y^t - Y_\lambda^t)$$

podemos observar que únicamente se cumple si $\hat{c}^t = c^t$, que al igual que el caso anterior también implica que la productividad total de los factores se mantiene constante, lo cual la excluye como relación de tipo general.

dad, la cual se basa en la hipótesis que las cantidades observadas de factores incorporan los avances o retrocesos en el TFP. Esta última al incorporar la simplificación descrita presenta algunas ventajas relacionadas con su aplicación. También hemos demostrado que las anteriores igualdades incorporan, como casos especiales, comportamientos restrictivos de los precios de los factores.

La relajación de las hipótesis formuladas, algunas de ellas habituales en el enfoque neoclásico de la teoría de la empresa, deben constituir el camino natural para la readaptación del planteamiento presentado a una situación más general. Este constituirá el objetivo de próximos trabajos.

Referencias

Averch, H. y Johnson, L. L. (1962): «Behavior of the firm under regulatory constraint», *The American Economic Review*, vol. 52, *núm. 2*, december, págs. 1062-1069.

Caves, D. W.; Christensen, L. R. y Swanson, J. A. (1978): «Productivity in U. S. Railroads, 1951-1974», Workshop Series, núm. 7820, august, University of Wisconsin-Madison. Social Systems Research Institute.

Cea García, J. L. (1982): «Génesis y reparto de la variación de la productividad global de las entidades financieras (la contabilidad de excedentes aplicada a la banca)», en: *I Jornadas de Estudio sobre Economía y Sociedad. El balance social de la empresa y las instituciones financieras,* Banco de Bilbao, págs. 407-436.

Courbois, R. y Templé, P. (1975): «La méthode des comptes de surplus et ses applications macroéconomiques», núm. 160 des *Collections de l'INSEE,* serie C, *núm. 35,* juillet, págs. 1-100.

Denny, M.; Fuss, M. y Waverman, L. (1981): «The measurement and interpretation of total factor productivity in regulated industries, with application to Canadian Telecommunications», en *Productivity Measurement in Regulated Industries* (edit. T. Cowing i R. Stevenson), Academy Press, New York, págs. 179-212.

Diewert, W. E. (1974): «Applications of duality theory», en (edit. M. D. Intriligator y D. A. Kendrick): *Frontiers of Quantitative Economics,* vol. 2, North-Holland, New-York, págs. 106-170.

Diewert, W. E. (1976): «Exact and superlative index numbers», *Journal of Econometrics, núm. 4,* may, págs. 115-146.

Eldor, D. y Sudit, E. F. (1981): «Productivity-based financial net income analysis», *OMEGA. The International Journal of Management Science,* vol. 9, *núm. 6,* págs. 605-611.

Fernández Sánchez, E. (1983): «La medida de la productividad global de los factores: una aproximación», *Investigaciones Económicas, núm. 20,* enero-abril, págs. 135-162.

Gehrig, W. (1980): «On certain concepts of neutral technical progress: definitions, implications and compatibility», en *The Economics of Technological Progress,* edit. T. Pun y S. Wibe, St. Martin's Press, New-York, págs. 3-21.

Genescà Garrigosa, E. y Grifell Tatjé, E. (1986): «Modificació dels indicadors de productivitat total quan es considera el mix de productes i l'ocupació de la capacitat», *Revista Econòmica de Catalunya, núm. 3,* setembre-desembre, págs. 14-24.

Grifell Tatjé, E. (1988): «Metodologia per a la mesura de la productivitat total dels factors en un context a curt termini», Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

Jorgenson, D. W. (1984): «The role of energy in productivity growth», *American Economic Review,* vol. 74, *núm. 2,* mayo, págs. 26-30.

Jorgenson, D. W. y Griliches, Z. (1967): «The explanation of productivity change», *The Review of Economic Studies*, vol. 34, págs. 249-282.
Kurosawa, K. (1975): «An agregate index for the analysis of productivity», *OMEGA. The International Journal of Management Science*, vol. 3, *núm. 2*, págs. 157-168.
Kurosawa, K. (1979): «Un enfoque estructural del concepto y medición de la productividad», en: *Seminario sobre productividad y política de empleo*, Ministerio de Economía, Dirección General de Política Económica, Madrid, noviembre, págs. 21-179.
Maroto Acin, J. A. (1980): «Consideraciones Entorno al Excedente de Productividad Global. Una Propuesta para la Evaluación de Resultados de la Empresa Pública», Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
Maroto Acin, J. A. (1981): «Antecedentes y fundamentos del excedente de productividad global», *Anales de CUNEF*, Madrid, págs. 247-284.
Maroto Acin, J. A. (1982): «La eficiencia de la empresa pública y el excedente de productividad global», *Hacienda Pública Española, núm. 78.*, págs. 67-79.
Martínez Mongay, C. y Pascual Lapeña, N. (1987): «Productividad multifactor y efecto capacidad en la industria española: 1971-1981», *Jornadas de Economía Industrial*, Madrid, septiembre.
Miller, D. M. (1983): «A profit linked productivity measurement procedure», Working Paper, núm. 83-002. The University of Alabama.
Miller, D. M. (1985): «Profitability = productivity + price recovery», *Harvard Bussines Review*, primer trimestre, págs. 101-111.
Myro Sánchez, R. (1983): *Medida y Análisis de la Productividad Global y de su Incidencia en la Rentabilidad de la Empresa*, Fundación Empresa Pública (Programa de Investigaciones Económicas), serie E, *núm. 18*, págs. 121.
Otha, M. (1974): «A note on the duality between production and cost functions: rate of returns to scale and rate of technical progress», *Economic Studies Quarterly*, vol. 25, december, págs. 63-65.
Rodes Biosca, J. M. (1980): «Contabilidad de excedentes y responsabilidad social de la empresa», *Economía Industrial, núm. 196*, abril, págs. 34-43.
Solow, R. A. (1957): «Technical change and the aggregate production function», *Review of Economics and Statistics*, vol. 39, *núm. 3*, august, págs. 312-320.
Usher, D. (1980): *The Measurement of Economic Growth*, Columbia University Press, New-York.
Vassal, J. C. (1972a): «La méthode des surplus. Application a l'analyse du comportement des enterprises (I), *Banque 308*, juny, págs. 571-580.
Vassal, J. C. (1972b): «La méthode des surplus. Application a l'analyse du comportement des enterprises (II)», *Banque 309*, juliol, págs. 657-671.
Vergés, J. (1982): «Un análisis crítico del enfoque del excedente de productividad global (EPG)», *Cuadernos de Economía*, vol. 10, *núm. 28*, mayo-agosto, págs. 417-438.
Vergés, J. y Genescà, E. (1983): «La medición de la productividad a nivel de empresa. Análisis crítico», *Esic Market, núm. 40*, enero-abril, págs. 59-83.

Abstract

This article proposes a methodology for the measure of the total factor's productivity, in discreet and absolute terms. It is based in the neoclassical theory of the production, but is not developed with a definition of a determinated index number. The needed hypothesis are specify as well as the different primal - dual relations are analized. The methodoly showed here will be use in the analysis of some lines of investigation in the area of interprise's economics.

Recepción del original, febrero, 1990
Versión final, abril, 1990