Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XIII, n.º 3 (1989), págs. 485-516

POLITICA DE FINANCIACION OPTIMA EN LA SEGURIDAD SOCIAL

Rafael ENRIQUEZ DE SALAMANCA

Secretaría de Estado de Hacienda

Los problemas financieros de la Seguridad Social, tanto en lo que se refiere a las cotizaciones a percibir como las prestaciones a pagar, planteados en determinadas situaciones, la evolución de un sistema de pensiones (obligatorio y voluntario) con un grado de capitalización no nulo o la valorización de un regimen de pensión con una cotización de antemano, se pueden plantear como problemas de programación matemática en el sentido más general que se pueda dar de ésta, lo que permite utilizar el término óptimo, dándose a veces la circunstancia de que las condiciones de unicidad del problema planteado lo convierten en un problema analítico.

1. Introducción

Es habitual en economía intentar dos modelos descriptivos de funcionamiento, en base a los cuales se pueden obtener los mejores comportamientos posibles. Frente a estos modelos descriptivos cabe plantearse modelos normativos [1], en el sentido de normas cuantitativas, que son menos ambiciosas que los modelos descriptivos, puesto que tratan de estudiar la evolución de un sector económico, en este caso la Seguridad Social o un sistema Público de pensiones, en el supuesto de poder manipular determinadas variables endógenas políticas (controles), tales como el porcentaje de cotización, el porcentaje de atribución de pensiones, tipo de revalorización de las prestaciones, etc.

De esta forma se puede obtener una trayectoria de la evolución del sistema de pensiones, que será óptima según algún criterio de optimalidad. Estos criterios pueden ser diversos según la naturaleza del problema planteado; continuo o discreto, o según el tipo de función o funcional objetivo que se maneje, lineal, cuadrática, no lineal ni cuadrática, funcional integral, etc. Es posible incluso que el planteamiento sea un sencillo sistema lineal [2], sin optimizar ninguna función, o por el contrario el planteamiento puede conducir a una compleja ecuación integral.

La novedad está no tanto en la forma como en el fondo, en este caso su aplicación a la Seguridad Social, puesto que ya existe una literatura abundante en campos próximos tales como el Seguro Privado [3].

[1] E. Bürmeister y A. Dobell (1973).
[2] Martín-Löf A. (1983).
[3] Martín-Löf A. (1983), Prieto E. (1980) y Tellen Bach (1980), este último introduce un original enfoque de cálculo de variaciones.

Las trayectorias obtenidas como resultado de los distintos métodos tienen un carácter ideal, bastante útil desde un punto de vista planificador, que no obstante puede ser precario cuando varían las condiciones del entorno en que funciona el sistema.

El entorno de un sistema de Seguridad Social, lo forma en primer lugar las variables laborales, que aquí se tratarán en base a hipótesis muy simplificadas.

Desde el punto de vista más general, los diversos métodos se pueden reducir al problema de la programación matemática, cuya formulación es la siguiente[4]:

Dado un conjunto P en un espacio euclideo E^n ($P \subset E^n$) y la función

$$F^0 : P \rightarrow E^1$$

con las condiciones definidas por las funciones:

$$F = (F^1,...F^n) : P \rightarrow E^n$$
$$G = (G^1 ...G) : P \rightarrow E^r$$

el problema de la programación matemática consiste en minimizar (o maximizar) $F^0(x)$, para todo ($x \in P$), tal que

$$\begin{array}{lll} F^i(x) & = 0 & \mathrm{i} = 1... n \\ G^i(x) & 0 & \mathrm{i} = 1... r \end{array}$$

Este planteamiento comprende como casos particulares muchos problemas más específicos: programación lineal, programación cuadrática, programación no lineal, control óptimo y en casos particulares resolución de sistemas de ecuaciones de diversas clases.

Las trayectorias de un sistema se corresponden con su evolución dinámica o mejor histórica en economía, en base a una descripción estructural subyacente que no va a ser objeto de estudio detallado aquí.

Una de las aplicaciones de la programación viene sugerida por las pensiones de la Seguridad Social Pública y las pensiones complementarias previstas constitucionalmente y reguladas por la ley de planes y fondos de pensiones, la superposición de ambos sistemas de pensiones constituye un sistema de pensiones con un grado de capitalización no nulo, y que presumiblemente evolucionará en un sentido creciente con el tiempo. La cuestión que interesa no es tanto la proporción estática entre el sistema de reparto y el de capitalización; tratada en otro lugar[5], como la dinámica del sistema en conjunto. Las metas a alcanzar se aproximarán en un sentido óptimo diferente según la función o funcional objetivo creado mediante unos valores de las variables de control que informan de la política financiera a seguir.

[4] Berkovitz L. D. (1976).
[5] Enríquez de Salamanca, R. (1986).

El problema de la dinámica de capitalización de un sistema de pensiones se puede plantear aislado o en el contexto de una economía nacional, con las cuestiones que se suelen plantear en estos casos, a saber influencia de las reservas en el crecimiento económico, en el ahorro o en la inversión, y también las cuestiones inversas como influencia de la inflación en las reservas, pérdida del poder adquisitivo de las pensiones y otras. Las cuestiones que se plantean aquí se van a plantear en valores constantes y de forma deterministas.

Finalmente se va a tratar el problema de la revalorización de pensiones de un regimen cuyas condiciones de cotización están previamente fijadas, como ejemplo de un problema continuo con solución única, en el que no cabe seleccionar entre diversas soluciones factibles, y que se reduce, por tanto, a un problema puramente analítico.

2. Problemas discretos

2.1. Programación dinámica

El primer problema que se puede plantear es un problema lineal analítico de control óptimo[6], basado en el principio de Bellman, en el cual la función a optimizar es cuadrática:

$$W = \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)^1 K_t \, (y_t - a_t) \qquad [1]$$

donde y_t es el vector de variables de estado, que incluye las variables endógenas y exógenas desplazadas y a_t son las metas a alcanzar deseadas. El modelo económico subyacente al problema en cuestión viene dado por un sistema lineal

$$y_t = A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + U_t \qquad [2]$$

en donde x_t es el vector de variables de control, b_t es una matriz de constantes y U_t es un vector de variables aleatorias idénticamente distribuidas y estocásticamente independientes.

La base del método de la Programación dinámica, llamada «principio de optimalidad» por Bellman[7], consiste en construir progresivamente la política óptima por períodos, comenzando en este caso por el final (período T), es fácil ver que minimizando [1] con respecto a x_t por diferenciación, la política óptima para el último período viene dada por

$$x_T = G_T y_{T-1} + g_t \qquad [3]$$

[6] Chow G. G. (1981).
[7] A. Kaufmann y R. Cruon (1967).

donde

$$G_t = -(C_T^1 H_T C_T)^{-1} \; (C_T^1 H_T A_T) \qquad [4]$$

$$g_T = -(C_T^1 H_T C_T)^{-1} \; C_T^1 \; (H_T b_T - h_T) \qquad [5]$$

siendo

$$K_T = H_T \text{ y } K_T a_T = h_t \text{ y } C_T = a'_T K_T a_T \qquad [6]$$

Substituyendo el valor óptimo así hallado $\hat{x}_T$ en [1], se puede calcular la política óptima para el período T − 1, con fórmulas análogas, teniendo en cuenta que ahora:

$$H_{t-1} = K_{T-1} + (A_T + C_T G_T)' \; H_T(A_T + C_T G_T) \qquad [7]$$

$$h_{T-1} = K_T G_{T-1} - (A_T + C_T G_T)' \; (H_T b_T - h_T) \qquad [8]$$

y siguiendo recursivamente con las fórmulas [3] − [8] se pueden calcular las políticas óptimas para los períodos T − 2, T − 3, ...1, hecha la salvedad de que las operaciones numéricas se hacen con los valores medios de y_t, en el supuesto de que $E(u_t) = 0$.

Este método de programación presenta las ventajas de operar con operaciones matriciales simples y es consistente con las metas temporales esperadas, no obstante presenta la limitación de que las funciones a optimizar son cuadráticas.

La estructura del modelo de seguridad social, se puede expresar de la forma:

$$V_{n+1} = (1 + \delta) \, V_n + \theta T_n - \mu(P_n) \qquad [9]$$

en donde V_n son las reservas del año n-simo, T_n el número de trabajadores cotizantes, P_n el número de beneficiarios de prestaciones (en principio pensionistas), θ tipo de cotización, μ porcentaje de prestación media, y δ tipo de interés, la unidad de medida tanto para las cotizaciones de los trabajadores, como para las prestaciones, como para las reservas, es el salario medio anual de los trabajadores.

La cotización a la Seguridad Social generalmente se realiza mediante un tipo de cotización, que incluye la cotización obrera y la cotización patronal cuyas proporciones son variables según los tiempos y los países. Además de las anteriores cotizaciones, está el importante capítulo de las subvenciones estatales, que se pueden interpretar como una cotización estatal por trabajador, de manera que el parámetro θ, comprende la cotización total, es decir obrera, patronal y estatal. Aquí se considera la cotización global y no su reparto entre los tres agentes, problema que desde luego no es sencillo y puede dar lugar a importantes repercusiones económicas cuyo estudio mediante programación lineal se ha sugerido hace ya tiempo[8].

[8] M. A. Coppini (1966).

Este modelo es más simple que un modelo empresarial, en el sentido de que no incluye elementos tales como recargos de seguridad, dividendos, reaseguros, etc.[9].

A efectos de establecer las hipótesis demográficas cabe inspirarse en los datos de Régimen General de la Seguridad Social. Así, por ejemplo, la evolución del número de trabajadores cotizantes, será del tipo

$$T_n = 7 \cdot \exp(0{,}01 \cdot t_n) \qquad [10]$$

siendo la unidad de medida 10^6 · Trabajadores.

Para los pensionistas tenemos

$$P_n = 1{,}2 \exp(0{,}07 \cdot t_n) \qquad [11]$$

siendo la unidad de medida 10^6 pensionistas de jubilación.

El valor de μ se aproximará para el actual sistema de reparto a 0,50, y el tipo de cotización para pensiones de jubilación es de un 8% y finalmente el valor inicial de las reservas es de 10% del salario medio anual de 10^6 trabajadores cotizantes. El tipo de interés se supondrá con un 7%.

En estas condiciones se puede formular el problema de la financiación de un sistema de pensiones (en el presente caso sólo jubilación) que comprende una parte pública obligatoria en sistema de reparto, y una parte privada voluntaria en régimen de capitalización y con la consiguiente acumulación de reservas. La cuestión puede plantearse así ¿qué tipos de cotización serán los óptimos para poder crear unas reservas con un determinado crecimiento y hacer frente a unas pensiones crecientes en cuantía?

Las variables exógenas políticas (o controles) serán θ, el tipo de cotización, y μ el porcentaje de pensión a atribuir. Acerca de esta última cabe pensar que a medio plazo el aumento de la pensión media total, debido al suplemento que supone la pensión complementaria privada, no va a ser muy elevado. La unidad financiera de medida, salario medio anual de los trabajadores cotizantes, se supondrá con valor constante.

La formulación matricial del modelo es:

$$\begin{bmatrix} V_T \\ V_{T-1} \\ \theta_T \\ \mu_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\delta & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{T-1} \\ V_{T-2} \\ \theta_{T-1} \\ \mu_{T-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & -\mu \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_T \\ \mu_T \end{bmatrix} \qquad [12]$$

y la función a optimizar:

$$W = (V_T - a_1,\ V_{T-1} - a_2,\ \theta_T - a_3,\ \mu_T - a_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_T - a_1 \\ V_{T-1} - a_2 \\ \theta_T - a_3 \\ \mu_T - a_4 \end{bmatrix} \qquad [13]$$

[9] Beard R. E., Pentikäinen T. y Pesonen E. (1984).

Los valores de a_i $i = 1...4$, son las metas deseadas que se variarán de acuerdo con los objetivos que se postulen acerca del futuro y que figuran en el siguiente cuadro

	μ	θ	V
H_1	2%	6	40%
H_2	2%	12	60%
H_3	2%	20	80%
H_4	2%	30	100%

En cualquiera de las 4 hipótesis de futuro aquí manejadas se supondrá que el porcentaje anual de crecimiento de la pensión media, como consecuencia de la pensión privada complementaria es de un 2% anual. Para la primera hipótesis H_1 se supone que un crecimiento del tipo de cotización de un 6% anual (con un tipo inicial del 8%), lo que en base a la ecuación [9], dará lugar aproximadamente a un crecimiento anual de las reservas de un 40% anual (a partir de una reserva inicial de 10%). En las sucesivas hipótesis la relación entre el incremento relativo de las reservas y el incremento relativo del tipo de cotización es decreciente, es decir la elasticidad de las reservas con relación al tipo de cotización es decreciente, cosa bastante evidente mediante la ecuación [9] si se tiene en cuenta que se parte de unas reservas prácticamente nulas.

De acuerdo con los datos demográficos y financieros de cada hipótesis, las políticas óptimas en sentido de aproximación cuadrática, vienen caracterizadas en el siguiente cuadro por los valores de las dos variables de control consi deradas: (θ) tipo de cotización y μ porcentaje de pensión.

Año	H_1		H_2		H_3		H_4	
	θ	μ	θ	μ	θ	μ	θ	μ
5	.119	.552	.149	.552	.206	.552	.304	.549
4	.108	.542	.126	.543	.154	.544	.196	.546
3	.101	.531	.111	.532	.125	.534	.143	.536
2	.096	.521	.101	.521	.107	.522	.115	.523
1	.090	.511	.093	.511	.096	.511	.098	.511

La hipótesis 4 es la que se aparta más de las metas en ambos parámetros de control. Por lo que se refiere a la realidad, el aumento en el tipo medio de cotización dependerá tanto de la extensión de los planes de pensiones complementarias entre los trabajadores, como de la cuantía de las pensiones previstas en el plan. En la medida que se conozcan los elementos anteriores y también los pensionistas anuales a que vaya a dar lugar los planes complementarios, puede ser de utilidad el control óptimo, ya que un aumento previsible en la cotización debido a la extensión de las pensiones complementarias puede repercutir de forma variable en el aumento de las reservas. En definitiva se trata de hacer corresponder una trayectoria óptima a las condiciones en que se desarrolle el futuro hipotético financiero del sistema.

El ejemplo desarrollado aquí es una simple muestra de como aplicar el control óptimo en el terreno de la Seguridad Social, sin embargo, es posible hallar aplicaciones un poco más complejas, por ejemplo en el seguro de enfermedad es bien conocido el hecho de que el gasto anual por asegurado es distinto según el grupo de edad, por lo que calificando a los asegurados en dos grupos de edades (O, E_1) y (E_1, W) con costes medios anuales n_1 y n_2 $(n_2 > n_1)$ el modelo demográfico financiero del seguro de enfermedad es:

$$V_{n+1} = (1 + \delta)\, V_n + \theta T_n - \mu_1 K_{E1,n} - \mu_2 K_{E2,n} \qquad [14]$$

donde K_1 son los asegurados del primer grupo K_2 son los asegurados del segundo grupo y T_n el número de trabajadores cotizantes. En el caso de que los asegurados fueran el total de la población[10].

$$K_{E1} = \int_{0}^{E_1} k\,(t)dt \quad K_{E2} = \int_{1}^{w} k(x + t)dt \qquad [15]$$

en donde $k(x)$ es la función continua que da la población por edades. Se tendrán así tres variables de control (θ, μ_1, μ_2) para estudiar la senda financiera óptima.

Se podrían considerar conjuntamente un sistema de pensiones y el seguro de enfermedad, en cuyo caso el número de variables de control serán $4(\theta, \mu, \mu_1, \mu_2)$. A su vez dentro del sistema de pensiones se podrían considerar las distintas clases de pensiones tales como: jubilación, invalidez, viudedad y enfermedad con lo cual el número teórico de variables de control puede aumentar.

El planteamiento del problema se puede complicar también por el aumento en el número de ecuaciones del modelo. Se puede obtener un ejemplo a partir de un problema que ha sido objeto de profuso tratamiento en la prensa económica; que es el aumento de la inversión a que puede dar lugar la formación de reservas de los planes de pensiones privadas.

Una de las ecuaciones usadas en el modelo aplicado keynesiano de Consael[11] de economía nacional y Seguridad Social es:

$$I_n = S_s + S_d + S_g + S_M \qquad [16]$$

en donde

I_n = inversión neta

S_s = $\theta T_n + V_{n-1} - \mu P_n$ = Ahorro de la Seguridad Social

S_d = Ahorro familias y empresas

S_g = Ahorro de la Administración pública (salvo seguridad social)

S_M = M − X (importaciones − exportaciones)

[10] Keyfitz N. (1977)

[11] Consael R. (1975 a).

La ecuación [16] expresa que el ahorro debe igualarse a la inversión ahorrada. El término inversión neta conlleva que el ahorro a considerar debe ser neto, es decir excluido el consumo de capital fijo y dejar fuera de consideración la variación de existencias, que de acuerdo con la contabilidad nacional no se refiere a bienes de capital fijo.

De esta forma se tiene un modelo de dos ecuaciones:

$$V_n = (1 + \delta)\, V_{n-1} - \theta T_n - \mu P_n$$
$$I_n = \theta T_n + \delta V_{n-1} - \mu P_n + b_n$$

con $b_n = S_d + S_g + S_M$

Escritas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} S_T \\ V_T \\ V_{T-1} \\ \theta_T \\ \mu_{t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{T-1} \\ V_{T-1} \\ V_{T-2} \\ \theta_{T-1} \\ \mu_{T-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_n & - P_n \\ T_n & - P_n \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_T \\ \mu_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [17]$$

Se plantea entonces un problema de estrategias contradictorias, un aumento deseable de la Inversión neta necesita de una acumulación de reservas que se forman mediante un aumento de la cotización que a su vez repercutirá en los precios por la doble vía de la demanda y de la producción, pero a su vez sin aumento de la cotización no es posible acumular reservas que estimulen la inversión. Dando un tratamiento marginal ideal a la Seguridad Social, es decir, manteniendo constantes el resto de las variables económicas, se pueden investigar algunos resultados.

La función a optimizar es una función cuadrática similar a la anterior. Como hipótesis de evaluación demográfica para los cotizantes se verá:

$$T_n = 8{,}6 \text{ Exp } (0{,}01\, t_n) \text{ (en millones de trabajadores)}$$

y como evolución demográfica de pensionistas de jubilación se usará la ley:

$$P_n = 1{,}5 \text{ Exp } (0{,}03\, t_n) \text{ (en millones de pensionistas)}$$

ambas hipótesis se basan en la consideración conjunta del Régimen General y del Régimen de Trabajadores Autónomos.

Como datos iniciales se tomará 8,5% para el tipo de cotización, 0,1 para las reservas matemáticas y 2,684 para la inversión neta, estas dos últimas medidas en función del salario medio anual de 10^6 trabajadores.

Como hipótesis de evolución se consideran las siguientes:

	μ	θ	V	I
H_1	2 %	6 %	36 %	1 %
H_2	2 %	10 %	60 %	3 %
H_3	2 %	16 %	36 %	6 %

En todas las hipótesis se considera que el incremento anual de la pensión media debido a la mejora de la pensión privada es de un 2 % para los próximos 5 años. La elasticidad de la inversión neta con relación al tipo de cotización se considera que es 0,5, valor que no difiere sensiblemente del calculado mediante las ecuaciones [17] y los valores iniciales anteriores.

Usando como variables de control (θ, μ) y el algoritmo de Chow de programación dinámica, los valores que dan lugar a la senda óptima (en el sentido de aproximación cuadrática a las metas deseadas) para cada hipótesis, figuran en el siguiente cuadro.

Año	H_1		H_2		H_3	
	θ	μ	θ	μ	θ	μ
5	.106	.498	.134	.496	.209	.489
4	.070	.483	.089	.473	.131	.449
3	.065	.473	.078	.466	.102	.447
2	.060	.465	.069	.460	.082	.447
1	.056	.457	.060	.455	.066	.447

Es fácil ver en este ejemplo que los valores obtenidos para las trayectorias óptimas de las variables de control no son tan parecidas a las hipótesis de partida como en el caso anterior. Naturalmente que cuantas más ecuaciones tenga el modelo menos intuitivas resultaran las trayectorias de las variables de control.

La consideración global del problema de la inversión y la Seguridad Social necesita de un modelo completo de economía Nacional y Seguridad Social para explorar políticas de control de la financiación. El control óptimo permite además una evaluación de la política económica seguida.

2.2. *Optimización directa*

Aunque históricamente el problema de control óptimo se formuló en forma continua tratando de elegir una función temporal que optimizara una función objetivo, la aplicación para modelos econométricos precisa un tratamiento discreto[12], en el que se trata de elegir variables que optimicen una función objetivo. El número de variables es igual al número de variables de control multiplicado por el número de períodos del sistema. Desde este punto de vista el problema de control óptimo es una maximización (o minimización) de una función general que puede ser no lineal y no cuadrática de varias variables.

El modelo económico se puede describir en forma determinista por un sistema de ecuaciones (que pueden no ser lineales) de la forma:

[12] Fair R. C. (1974).

$$f_{it} = (y_t, Z_t, X_t, \alpha_{it}) = 0$$
$$i = 1, \ldots g \text{ (}g\text{ n.º variables endógenas)} \qquad [18]$$
$$t = 1, \ldots T \text{ (}T\text{ n.º total de períodos)}$$

y en donde:

y_t = vector de variables endógenas en el período t (g variables)

Z_t = vector de variables predeterminadas en el período t (no de control)

X_t = vector de variables control en el período t

α_{it} = vector de parámetros distintos de cero incluidos en la ecuación i para el período t.

Se supone que el modelo dado por las ecuaciones es tal que para todos los dados valores en Z_t, X_t y α_{it} ($i = 1, \ldots g$) se pueden resolver numéricamente para y_t. En modelos lineales y_t se obtiene a partir de las ecuaciones de la forma reducida.

La función objetivo para un horizonte de T períodos, es una función h (que puede ser no lineal y no cuadrática) de la forma:

$$W = h\ (y_1 \ldots y_T;\ Z_1 \ldots Z_T;\ x_1 \ldots x_T) \qquad [19]$$

donde W es una escala que es el valor que toma la función h para y_t, Z_t, X_t ($t = 1 \ldots T$). El problema del control óptimo para un modelo determinístico en tiempo discreto, consiste en hallar los valores de $X_1 \ldots X_T$ que maximicen W sujeto a las condiciones dadas por [18]. Dados los valores de las variables predeterminadas Z_t los parámetros y las variables de control x_t en virtud del supuesto acerca de la solución del modelo, se puede calcular y_t de forma que para todo valor de x_t se puede calcular el valor y_t que le corresponde (conocidos los valores Z_t y α_{it}), de manera que se puede construir una aplicación ϕ:

$$\phi : x_t \rightarrow y_1 \ldots y_T,\ (Z_1 \ldots Z_t) \rightarrow W$$

de forma que el problema de control se puede transformar en un problema de maximización sin condiciones:

$$W = \phi\ (x) \qquad [20]$$

Normalmente y_t no se puede poner explícitamente en función de Z_1, X_t y α_{it}, por lo que tampoco W en [19] se puede poner explícitamente en función de Z_1, X_t y α_{it}. No obstante, dados valores para Z_t y α_{it} se pueden calcular numéricamente valores de W para diferentes valores de X.

De esta forma el problema de control óptimo se transforma en un problema de maximización no condicionado de una función de varias variables. Existen varios métodos para resolver este problema, aunque se utilizará un método de evaluación del Jacobiano. Este método resuelve el problema para todos los períodos simultáneamente a diferencia del método de programación dinámica. Cabe señalar que la optimización directa presenta la ventaja de que tanto el modelo como la función objetivo pueden adoptar forma flexible, no necesitando ser ni lineales ni cuadráticas. Las soluciones obtenidas no son consistentes en el tiempo, que es la forma habitual de tales funciones lo que da lugar a políticas open-loop (bucle abierto)[13].

Como aplicación a la Seguridad Social se va a considerar un sistema de pensiones, cuya ecuación de evaluación de reservas viene dada por:

$$V_n = (1 + \delta)\, V_{n-1} + \theta T_n - \mu P_n \qquad [21]$$

Para la función objetivo se puede utilizar unos indicadores financieros que dan cuenta del estado de evolución del sistema de pensiones, que son

$$KQ = \frac{V_n}{\mu P_n} \qquad [22]$$

$$VQ = \frac{\mu P_n}{\theta t_n + \delta V_{n-1}} \qquad [23]$$

KQ es el indicador de capital que consiste en la relación entre las reservas matemáticas acumuladas y las prestaciones anuales. VQ es el indicador de relación prestaciones/recursos que como su nombre indica mide la relación entre las prestaciones anuales y los ingresos por cotizaciones y rendimientos del capital. El indicador KQ tiende a crecer cuando se inicia un proceso de formación de reservas como es el caso en que a un sistema obligatorio de reparto se le añade un sistema de pensiones complementarias privado en régimen de capitalización. Por el contrario el indicador VQ tiende a decrecer en la situación anterior como consecuencia del aumento de los intereses que produce la reserva.

La función objetivo a considerar viene dada por:

$$W = \sum_{t=1}^{T} \left[(\mu_t - P_t)^2 + \left(\frac{\mu_n P_n}{\theta_n T_n + \delta V_n} - VQ_t \right)^2 + (\theta_t - C_t)^2 \right] \qquad [24]$$

se ve que el segundo término de la expresión general es un término fraccional, por tanto, no lineal ni cuadrático lo que plantea un problema que no es resoluble en principio mediante el algoritmo de Chow de programación dinámica. Los valores P_t, VQ_t y C_t son las metas deseadas que se pretenden alcanzar mediante valores adecuados de las variables de control μ_t y θ_t ($t = 1 \ldots T$).

Las hipótesis demográficas de evolución de trabajadores cotizantes y pensionistas son las mismas expresadas en [10] y [11], el valor inicial de la reserva en 0,1 con un crecimiento interanual de 40 % durante 5 años, el valor inicial del tipo de cotización es de un 8,84 % y un crecimiento interanual de un 6 %, del valor medio de la pensión es de 50 % del salario medio anual y su crecimiento

[13] Martínez Aguado T. y Pauly P. (1986).

es de un 2 % anual. En cuanto a los valores de VQ_t correspondientes a las anteriores hipótesis son:

$$VQ_1 = 0{,}9387$$
$$VQ_2 = 0{,}9112$$
$$VQ_3 = 0{,}8900$$
$$VQ_4 = 0{,}8657$$
$$VQ_5 = 0{,}8406$$

Aplicando el método de optimización directa, se obtienen los siguientes valores para las variables que optimizan la función W:

$$\mu_1 = 0{,}5099967$$
$$\mu_2 = 0{,}5200006$$
$$\mu_3 = 0{,}5303981$$
$$\mu_4 = 0{,}5409842$$
$$\mu_5 = 0{,}5517381$$
$$\theta_1 = 0{,}09486213$$
$$\theta_2 = 0{,}01004397$$
$$\theta_3 = 0{,}1063707$$
$$\theta_4 = 0{,}1127207$$
$$\theta_5 = 0{,}1195585$$

Considerando como función objetivo alternativa la función siguiente:

$$W = \sum_{t=1}^{T} \left[(\mu_t - P_t)^2 + \left(\frac{V_t}{\mu_t P_t} - KQ_t \right)^2 + (\theta_t - C_t)^2 \right] \qquad [25]$$

Usando las mismas hipótesis anteriores con los correspondientes valores del indicador de capital:

$$KQ_1 = 0.2297$$
$$KQ_2 = 0.3039$$
$$KQ_3 = 0.4072$$
$$KQ_4 = 0.5419$$
$$KQ_5 = 0.7009$$

y aplicando nuevamente el método de optimización directa, los valores de las variables de control que optimizan la función W son:

$$\mu_1 = 0{,}5069180$$
$$\mu_2 = 0{,}5202472$$
$$\mu_3 = 0{,}5305869$$
$$\mu_4 = 0{,}5410259$$
$$\mu_5 = 0{,}5517293$$

$$\theta_1 = 0{,}1091064$$
$$\theta_2 = 0{,}09912707$$
$$\theta_3 = 0{,}1056573$$
$$\theta_4 = 0{,}1126732$$
$$\theta_5 = 0{,}1193091$$

El valor de θ_2 es ligeramente inferior al de θ_1 en contra de lo ocurrido anteriormente y en contra de lo que intuitivamente cabía esperar, lo que pone de manifiesto uno de los inconvenientes de este método, que son las inconsistencias en los valores temporales de las variables de control.

3. Problemas continuos

3.1. Control Optimo

Considerando un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

$$x = f(x, t, \mu) \qquad x(t_o) = x_0 \qquad [26]$$

donde x, vector de estado, y f son vectores n-dimensionales y n es un vector m-dimensional llamado control del sistema, que puede satisfacer condiciones de la forma

$$\alpha_j \leq u_j < \beta_j \qquad \beta_j > \alpha_j \qquad j = 1, \ldots, m \qquad [27]$$

El problema del control óptimo consiste en encontrar 1 control $u(t)$ que minimiza el funcional

$$J(u) = M(x(T), T) + \int_{to}^{T'} L(x, t, u)\, dt \qquad [28]$$

satisfaciendo las condiciones finales

$$\psi\ (x(T'), T') = 0 \qquad [29]$$

donde ψ es un vector h-dimensional, L se evalúa a lo largo de una solución de [26] y M es una función definida en el conjunto de estados terminales y el tiempo final (T'). La solución a este problema se le llama control óptimo y trayectoria óptima es la correspondiente al control óptimo.

Planteado de esta manera se llama el problema de Control de Bolza. La solución a este problema se basa en el principio del mínimo de Pontriagin, que da las condiciones necesarias de optimalidad en el supuesto de unas condiciones apropiadas de continuidad y diferenciabilidad.

En el caso particular aquí considerado, en el que T' es fijo y que no existan condiciones finales, si $u^*(t)$ es un control óptimo y $x^*(t)$ es su correspondiente trayectoria óptima, existen entonces multiplicadores $P_o > 0$, $P_1(t)$, ... $P_n(t)$ no nulos simultáneamente tal que cumplen las siguientes condiciones:

a) el vector $p(t) = (P_1(t), \ldots P_n(t))'$ es continuo en $[t_o, T']$ y las funciones $x^*(t)$ y $p(t)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales hamiltoniano

$$\dot{x} = \frac{\partial H\,(x, P_o, u, t)}{\partial P} \quad \text{(ecuaciones de estado)} \qquad [30]$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H\,(x, P_o, u, t)}{\partial P} \quad \text{(ecuaciones de coestado)} \qquad [31]$$

donde el hamiltoniano H está dado por

$$H(x, P_o, P, n, t) = P_oL + P't(' = \text{traspuesto}) \qquad [32]$$

b) $(u)^*(t)$ minimiza $H(x^*, P_o, P, u, t)$ en el conjunto admisible $\mho$ de soluciones $u(t)$ para $t\ \varepsilon[t_o, T]$, es decir

$$H(x^*, P_o, P, u^*, t) \leq H(x^*, P_o, P, u, t)$$

para todo $u(t)\ \varepsilon\ \mho$

c) Las ecuaciones de transversalidad

$$P(T') = \frac{\partial H}{P_o\,\partial x^*} \qquad [33]$$

no anulándose el vector $(P_o, P(t))$.

La aplicación más general que se puede realizar en la Seguridad Social parte de la ecuación diferencial del equilibrio financiero de la Seguridad Social

$$\dot{V} = \delta V + \theta T - \mu P$$

en donde V, T y P son rentas continuas de reservas, ingresos sujetos a cotización y bases de cálculo globales de las prestaciones. Por su parte δ, θ y μ son funciones continuas de tasa instantánea de interés, tipo de cotización y porcentaje de prestación media.

Para formar el funcional objetivo se puede utilizar el indicador

$$IQ = \frac{\theta T + \delta V}{\mu P}$$

que da la relación entre recursos y prestaciones, es decir que mide el grado de cobertura de las prestaciones del sistema. En el caso de la formación de un sistema mixto de pensiones (sistema reparto obligatorio, sistema capitalización voluntario) el indicador variará desde un valor unitario (sistema de reparto) hasta un valor mayor que uno, que dependerá del grado de capitalización que se prevea para el sistema. El funcional objetivo trata de medir la distancia entre las metas deseadas y los valores que afectivamente puede alcanzar el sistema, expresando la distancia mediante una función cuadrática. Dicho funcional objetivo es:

$$J = \int_{t_0}^{T} (IQ - C)^2 \, \mathrm{dt} \qquad [34]$$

en donde C es una función continua que expresa las metas a alcanzar. El funcional [34] no es más que una transposición a términos continuos de las funciones objetivo usadas en programación dinámica.

En forma compacta el problema de control óptimo continuo se puede formular así:

$$\text{Minimizar } J = \int_{t_0}^{T} (IQ - C)^2 \, \mathrm{dt} \qquad [35]$$

$$H = P_o(IR - C)^2 + P_1(\delta V + \theta T - \mu P) \text{ (Hamiltoniano)}$$

$$\dot{V} = -\frac{\partial H}{\partial P_1} = \delta V + \theta T - \mu P \text{ (ecuación de estado)}$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial V} = -2P_o(IQ - C)\,\delta/\mu P - P_1\delta$$
$$\text{(ecuación de coestado)}$$

$$P_1(T') = 0 \quad (P_o = 1) \text{ (condición de transversalidad)}$$

Para resolver este problema es conveniente usar procedimientos numéricos susceptibles de programarse en computador, aquí se usará el método del gradiente[14].

El método del gradiente consta de las siguientes fases:

1) Elegir un valor inicial $\hat{u}(t)$ y resolver la ecuación

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P} = f(x, t, u)$$

con las condiciones iniciales dadas. Memorizar $\hat{x}(t)$, t_o, t, T

2) Determinar $P(T')$ a partir de

$$P(T') = \frac{\partial M}{\partial X}$$

e integrar regresivamente

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -\frac{\partial L}{\partial X} - \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)' P$$

con las condiciones de contorno dadas. En el proceso de integración calcular $\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)$

[14] Mufti I. M. (1970).

3) Resolver en sentido progresivo

$$\dot{x} = \frac{\partial M}{\partial P} = f(x, t, u) \qquad [36]$$

y calcular $u = \hat{u} + K\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)$, para diversos valores de K dados por

$$K = \frac{|\varepsilon|}{\left[\int_{t_0}^{T'} \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)' \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

y obtener los correspondientes valores de

$$J(u) = M(x(T')) + \int_{to}^{T} L(x, t, v)\, dt$$

4) Mediante una técnica de ajuste de curvas, hallar el valor de K que minimiza $J(u)$, y usar este valor para estimar el próximo valor de μ en [36]. Volver a la primera fase y repetir. El proceso termina cuando $\delta J(u)$ tiende a cero.

Este método tiene la ventaja de que permite tratar el caso en que existan condiciones finales del tipo [29], utilizando la técnica de la función de penalización. En este caso el funcional a usar es

$$\hat{J} = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{h} K_j \psi_j^2 + \int_{t_0}^{T'} (IQ - C)^2\, dt \qquad [37]$$

donde

$\psi_i = \hat{x}_i(T') - x_{if}$ ($\hat{x}_i$ = valor estimado de x_i) ($\hat{x}_{if}$ = valor final de x_i)

$K_i = \left|\frac{x_i(T) - x_{if}}{\varepsilon_i}\right|$ (ε_i = tolerancia)

K_i es la razón violación/tolerancia que se calcula al final de cada etapa. El valor usado en la tolerancia permite aproximaciones más o menos precisas de las condiciones finales y en definitiva del problema planteado.

El período considerado $[t_o, T]$ es de 5 años, el valor inicial de la reserva es o, 1, y $\delta = \log(1{,}08)$, el valor final de la reserva V_f así como los valores iniciales de las funciones θ y μ, son distintos para cada hipótesis que figura en el cuadro adjunto:

	V_f	θ	C	μ
H_1	2,4761	.2427 Exp(0,0622t)	.9670 Exp(0,0622t)	.60 Exp(0,0198t)
H_2	1,0486	.2498 Exp(0,04698t)	.9987 Exp(0,0211t)	.60 Exp(0,0198t)
H_3	0,3713	.2511 Exp(0,0322t)	1,007 Exp(0,0030t)	.60 Exp(0,0198t)

Las hipótesis se han colocado en un orden descendente en cuanto a grado de capitalización. Por lo que se refiere a μ se considera la misma función en las tres hipótesis. Las funciones T y P son las correspondientes al Régimen General, es decir las [10] y [11].

Considerando solamente a θ (tipo de cotización) como la única variable de control, se añaden además condiciones de control del tipo [27] que en este caso serán

$$0.25 < \theta < 0.38$$

En el gráfico 1 se pueden ver las funciones de control para las diversas hipótesis, obtenidas con una tolerancia $\varepsilon = 10^{-5}$

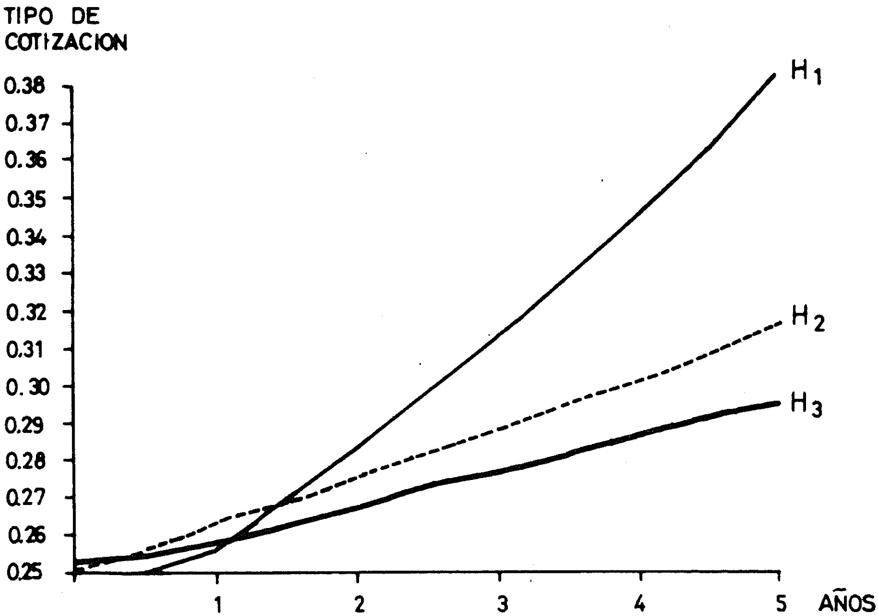

Gráfico 1

En el caso de considerar dos funciones de control (θ, μ), se añade la condición de control

$$.60 < \mu < 0.70$$

Los resultados obtenidos para las variables de control con una tolerancia igual a la anterior, figuran en el gráfico 2.

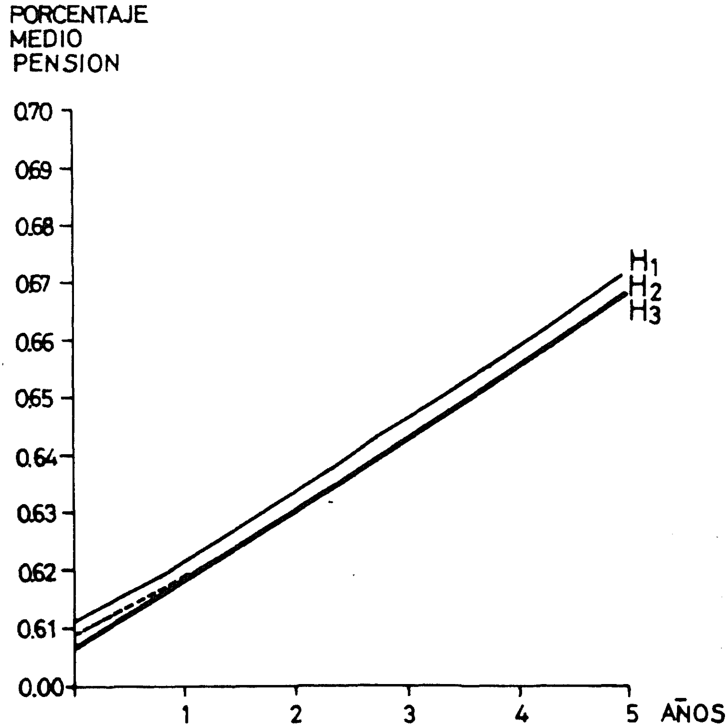

Gráfico 2-a

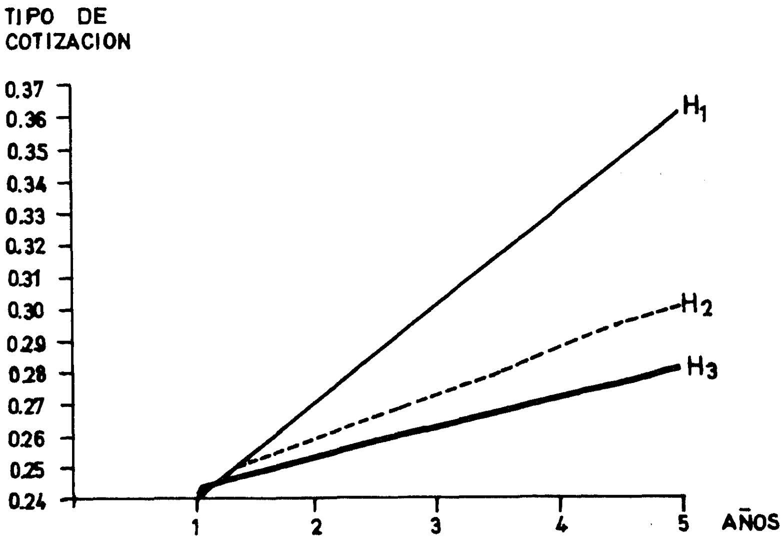

Gráfico 2-b

Los problemas de control óptimo se hacen progresivamente más complejos a medida que aumenta el número de variables de control y el número de ecuaciones de estado. Como ejemplo de sistema de ecuaciones diferenciales se puede poner el caso de un sistema de Seguridad Social que se desarrolla en el entorno de una economía nacional. El modelo macroeconómico a considerar va a ser un modelo simplificado que excluye la existencia de mercado monetario y ajustes de precios, centrándose en los aspectos reales del proceso de crecimiento [15]. Las hipótesis en que se base son las siguientes:

a) La economía es cerrada, prescindiéndose de la fiscalidad.
b) La remuneración del trabajo y la remuneración del capital varían en una relación constante.
c) Los ingresos del trabajo son enteramente consumidos.
d) El ahorro de la Seguridad Social se invierte íntegramente en el proceso de producción.
e) La tecnología tiene rendimientos constantes a escala.

Sea Y el producto interior, W la remuneración de trabajo y K el stock de Capital, entonces se tiene

$$\begin{aligned} W &= \lambda \mathrm{Y} \\ K &= \nu \mathrm{Y} \end{aligned} \qquad [38]$$

donde λ y ν son constantes.

Si r es el tanto de rendimiento de los capitales

$$(1 - \lambda)\, Y = rK = r \cdot v \cdot Y$$

luego

$$(1 - \lambda) = \nu \cdot \mathrm{r}$$

Sea V el patrimonio de la Seguridad Social, θT las cotizaciones y μP las prestaciones por unidad de tiempo. Entonces el ahorro de la Seguridad Social es

$$\dot{V} = rV + \theta I - \mu P \qquad [39]$$

y el ahorro de los otros propietarios de capitales

$$\sigma\, [(1 - \lambda)\, Y - rV] \qquad [40]$$

donde σ designa la propensión al ahorro de los capitalistas.

La ecuación de equilibrio del mercado de capitales es entonces

$$\dot{K} = \sigma[(1 - \lambda)\, Y - rV] + \dot{V}$$

[15] Consael, R. (1975 b).

Poniendo

$$s = \sigma(1 - \lambda) = \sigma \cdot v \cdot r$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{V} + sY = v\,\dot{Y} + \frac{S}{v} V$$

$$\dot{V} = rV + \theta T - \mu P$$

que en la forma normalizada usada en la teoría del control es

$$\dot{Y} = \frac{S}{v} Y + \left(\frac{r}{v} - \frac{s}{v^2}\right) V + \frac{\theta}{v} T - \frac{\mu}{v} P \qquad [41]$$

$$\dot{V} = rV + \theta T - \mu P$$

De esta forma se puede plantear un problema de control óptimo continuo similar al anterior aunque con mayor grado de complejidad.

$$\text{Minimizar } J = \int_{t_0}^{T} (IQ - c)\, dt \qquad [42]$$

$$H = P_o (IQ - C)^2 + P_1 (rV + \theta T - \mu P) + P_2 \left[\frac{s}{v} Y + \left(\frac{r}{v} - \frac{s}{v^2}\right) V + \frac{\theta}{v} T - \frac{\mu}{v} P\right] \text{ (Hamiltoniano)}$$

$$\dot{V} = \frac{\partial H}{\partial P_1} = rV + \theta T - \mu P \text{ (Ecuación estado)}$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial P_2} = \frac{s}{v} Y + \left(\frac{r}{v} - \frac{s}{v^2}\right) V + \frac{\theta}{v} T - \frac{\mu}{v} P \text{ (Ecuación estado)}$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial V} = -2\,(IQ - C) \cdot \mathrm{r}/\mu P - p_1 r - p_2 \left(\frac{r}{v} - \frac{s}{v^2}\right)$$

(Ecuación coestado)

$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial Y} = -P_2 \frac{s}{v} \text{ (Ecuación coestado)}$$

$$P_1 (T') = 0$$

$$P_2 (T') = 0$$

Como valores para las constantes se tomarán las siguientes:

$$v = 4 \qquad \lambda = 0{,}75 \qquad \sigma = 60\,\% \qquad \mathrm{r} = \log(1{,}08)$$

Los valores iniciales de las variables V e Y son

$$V_o = 0{,}1$$

$$Y_o = 90$$

La variable de control es θ, y μ es una función de la forma

$$\mu = .60 \text{ Exp } (0{,}0196t)$$

Los valores finales de V, V_f y los valores iniciales de θ son los mismos que los adoptados en las hipótesis del ejemplo anterior, al igual que las funciones T y P (sólo se tiene en cuenta el Régimen General). El problema de las condiciones finales se resolverá con el método de la función de penalización y una tolerancia ε = 10-5.

Los resultados para Y, producto interior, se representa en el gráfico 3.

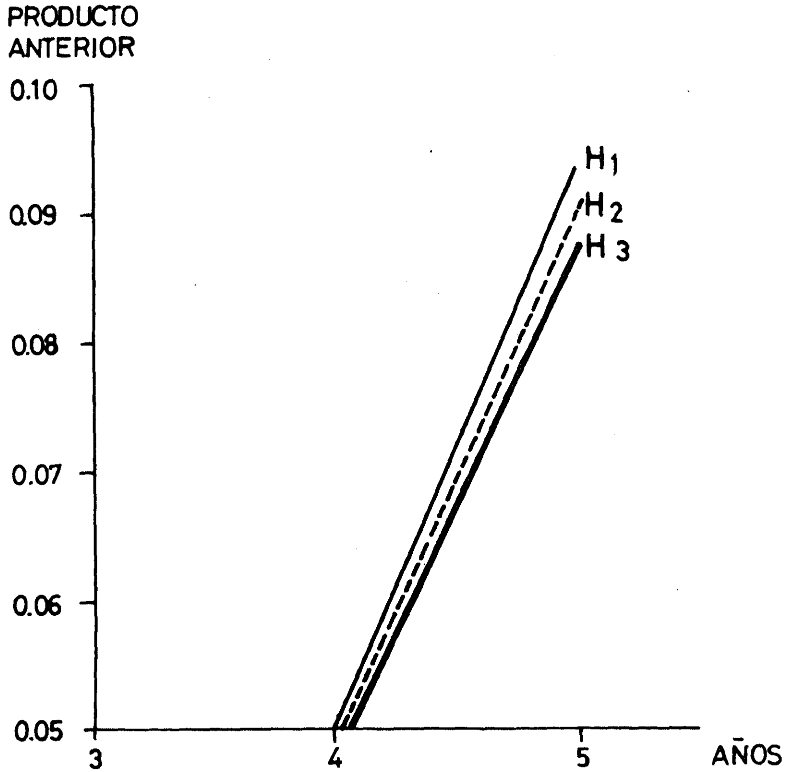

Gráfico 3

La influencia de la Seguridad Social en la expansión de la economía a plazo medio (5 años) no es apreciable en el modelo adoptado. En la hipótesis 1 el crecimiento del producto interior resulta al final del período superior en un

0,59 % al de la hipótesis 3 (la hipótesis de acumulación de reservas más baja), y en la hipótesis 2 el crecimiento del producto interior resulta un 0,18 % superior al de la hipótesis 3 al final del período.

El problema del control óptimo en el caso de varias variables, exige estudiar cuidadosamente el campo de variación de las funciones de control para las soluciones de las ecuaciones diferenciales que forman el sistema de forma analítica o numérica. Las funciones iniciales se deben tomar dentro de ese campo, y luego probar las condiciones de aproximación a la solución, sin olvidar que el principio del mínimo de las condiciones necesarias pero no las suficientes.

4. Problemas analíticos

El problema de la revalorización de pensiones, permite plantear cuestiones financieras cuya resolución no se puede formular en términos de programación matemática. Este es el caso del problema inverso de la revalorización que consiste en averiguar cual es la tasa de adaptación de las pensiones en curso de acuerdo con las posibilidades financieras de un régimen. En el caso concreto de las pensiones de jubilación se puede plantear en un momento dado una reforma en la atribución las pensiones, bien en la base reguladora, bien en el porcentaje de atribución de manera que de acuerdo a las posibilidades recaudatorias del régimen se pueda garantizar un determinado porcentaje de revalorización.

Mediante un esquema de Lexis [16], se puede representar a los pensionistas de jubilación, siendo t eje de calendario y x eje de edades (gráfico 4), las líneas diagonales de vida tienen por ecuación.

$$x - x_1 = t - z \qquad [43]$$

La línea de vida que separa la generación de entrada de las pensiones atribuidas después de la reforma de régimen, viene dada por $(z = o)$.

$$\dot{x}_1 - x_1 = t - z$$

En donde x_1 es la edad de entrada en jubilación, t_0 es la fecha de reforma del régimen y z fecha genérica de atribución de la pensión.

El conjunto de pensiones $L(t)$ se divide en dos categorías: $L_1(t)$ pensionistas que entran en $z < 0$ es decir después de la reforma y $L_2(t)$ pensionistas que existían en $z = 0$ es decir antes de la reforma. La ponderación relativa de estos efectivos viene dada por $l_1(t) + l_2(t) = 1$. La estructura por edades de ambos colectivos se caracteriza por las funciones relativas $\lambda_1(x,t)$, $\lambda_2(x,t)$. La pensión media de las nuevas pensiones atribuidas en z, se denominará $R_1(z)$, y la pensión media de las pensiones anteriores a la reforma de edad z, viene dada por $R_2(z)$.

[16] Kaiser E. (1970 y 1975).

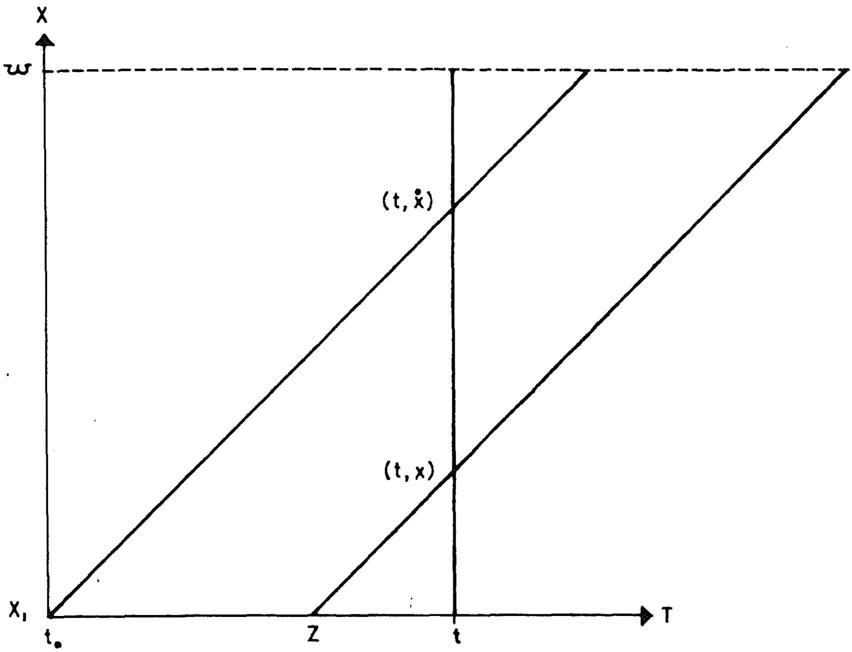

Gráfico 4

En un tiempo t, el valor medio de las pensiones de los dos colectivos anteriores, consideradas como pensiones estáticas, es decir sin ningún tipo de revalorización, viene dado por

$$\bar{R}_1(t) = \int_{x_1}^{\dot{x}(t)} \lambda_1(x,t) \cdot R_1(z)\, dx \qquad [44]$$

$$\bar{R}_2(t) = \int_{\dot{x}(t)}^{x_2} \lambda_1(x,t) \cdot R_2(x-t)\, dx$$

Considerando dinámicas a las pensiones, es decir pensiones que se adaptan a la evolución de los salarios, cuya intensidad de variación viene caracterizada por η, entonces las pensiones medias son

$$\tilde{R}_1(t) = \int_{x_1}^{x^o} \lambda_1(x,t)\, R(2) \exp\left[\int_o^t \eta\, d\tau\right] dx$$

$$[45]$$

$$\tilde{R}_2(t) = \int_{x_o}^{x_2} \lambda_2(x,t)\, R_2(x-t) \exp\left[\int_o^t \eta\, d\tau\right] dx$$

Finalmente considerando (lo que es más próximo a la realidad) semidinámicas aquellas pensiones que se adaptan al nivel general de precios, caracterizado por una intensidad de variación π, cuando son pensiones en curso, y al nivel general de salarios cuando son pensiones nuevas, las pensiones medias son

$$\overset{\ast}{\bar{R}}_1(t) = \int_{x_1}^{x^0} \lambda_1(x,t)\, R_1(z) \exp\left[\int_0^z \eta d\tau + \int_z^t \pi d\tau\right] dx$$

$$\overset{\ast}{\bar{R}}_2(t) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_2(x,t)\, R_2(x-t) \exp\left[\int_0^t \eta d\pi\right] dx \qquad [46]$$

Entonces la pensión media total $\overset{\ast}{\bar{R}}$, viene dada por

$$\overset{\ast}{\bar{R}}(t) = l_1(t) \int_{x}^{x^0} \lambda_1(x,t)\, R_1(2) \exp\left[\int_0^z \eta d\tau + \int_z^t \pi d\tau\right] dx$$

$$+ l_2(t) \int_{\dot{x}}^{x_2} \lambda_2(x,t)\, R_2(x-t) \exp \int_0^t \pi d\tau \quad dx \qquad [47]$$

Considerando el factor de depreciación $m(t)$ definido por

$$m(t) = \exp \int_0^t (\pi - \eta)\, dr \qquad [48]$$

y utilizando la notación $(m(t/z) = m(t)/m(z)$, se obtiene la expresión

$$\overset{\ast}{\bar{R}}(t) = l_1(t)\, \overset{\ast}{\bar{R}}_1(t) \int_{x_l}^{\dot{x}} \lambda_1(x,t) \frac{R_1(z)}{\bar{R}_1(t)}\, m(t/z)\, dx + l_2(t)\, R_2(t)\, m(t) \qquad [49]$$

multiplicando por $L(t)$ se obtiene el valor del montante anual de las pensiones $\Lambda(t)$, y dividiendo por

$$\tilde{H} = \overset{\ast}{L}\ \tilde{U}$$

donde

$\overset{\ast}{L}$ = Efectivo de cotizantes

$\tilde{U} = U \exp \int_0^t \eta d\tau$ (U salario medio estático) se obtiene

$$\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t) = \alpha(t)\, m(t) \int_{x_1}^{x^0} \lambda_1 \frac{R_1}{\bar{R}_1} m^{-1}(z)\, d_x + \alpha_2(t)\, m(t) \qquad [50]$$

y reemplazando π por una tasa de adaptación libre $\varkappa$, se obtiene mediante el cambio de variables $x - x_1 = t - z$, la ecuación integral de la adaptación de pensiones viene dada por

$$\gamma(t) = \int_0^t K(t - z, z, t)\,(z) dz + F(t) \qquad [51]$$

en donde

$$\gamma(t) = m^{-1}(t)$$

$$K(tz,z,t) = \frac{\alpha_1(t)\, \lambda_1(t-\dot{z}+x,t)\, R_1(z)}{\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t) \cdot \bar{R}_1(t)}$$

$$F(t) = \alpha_2(t)/\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t)$$

$\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t)$: cuota de reparto anual del total de las pensiones.

$\alpha_1(t)$: cuota de reparto anual de las pensiones atribuidas después de la reforma.

$\alpha_2(t)$: cuota de reparto anual de las pensiones atribuidas antes de la reforma.

La ecuación es una ecuación integral de Volterra de segunda especie. Bajo hipótesis muy generales de continuidad de F y K, las ecuaciones integrales de segunda especie dan lugar a la existencia y unicidad de una solución, por lo que no tiene lugar plantearse la optimización de un funcional de $\varphi(t)$, a fin de hallar la tasa de adaptación

$$\varkappa(t) = \eta(t) - \frac{d}{d_t} l_n\, \varphi(t) \qquad [52]$$

El caso contemplado se reduce entonces a un problema analítico, que consiste en hallar la solución de una ecuación integral de Volterra de segunda especie. Conviene señalar que la tasa de adaptación se refiere al conjunto de pensiones, siendo el problema aquí tratado distinto del problema del reparto [17] entre diferentes clases de pensiones de una revalorización monetaria previamente fijada en su cuantía.

En el supuesto de que la entrada en jubilación sea la edad x_1, se puede considerar la distribución de frecuencias del total de pensionistas (gráfico 5).

[17] Enríquez de Salamanca, R.

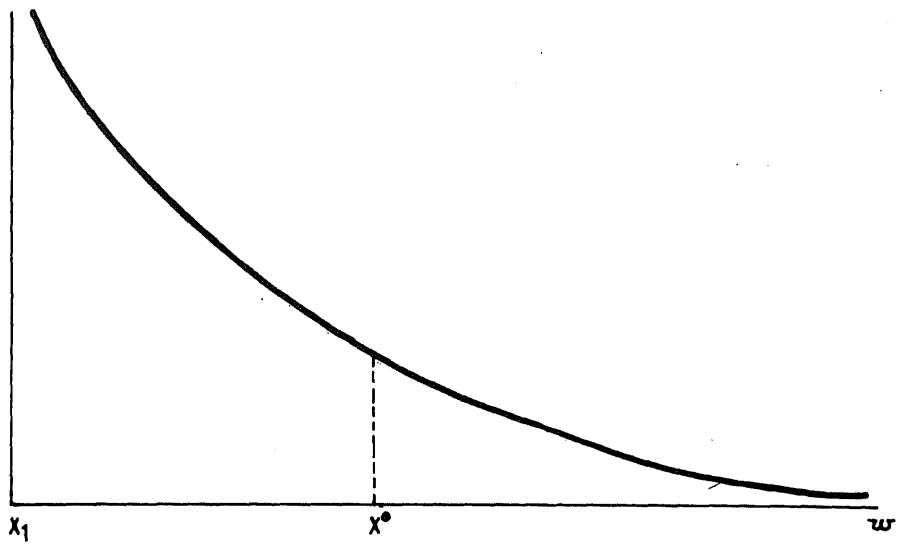

Gráfico 5

En este caso la distribución $\lambda_1(x_1 t)$ viene dada por la distribución truncada en $(x_1 \mathring{x})$.
Por otra parte una ecuación diferencial lineal[18].

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots a_n(x)\, y = F(x) \qquad [53]$$

con coeficientes continuos $a_1(x)$ $(i = 1, 2 \dots n)$, con las condiciones iniciales

$$y(o) = C_o, y'(o) = C_1 \dots y^{n-1}(o) = C_{n-1}$$

puede reducirse a la resolución de una ecuación integral de Volterra de segunda especie. En el caso de una ecuación diferencial de cuarto orden

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + a_1(x)\frac{d^3 y}{dx^3} + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_3(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)\cdot y = F(x) \qquad [54]$$

se reduce a una ecuación de la forma

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt + f(x)$$

18 M. Krasnov, A. Kiseliev y G. Makarenko (1982).

con

$$K(x,t) = -[a_1(x) + a_2(x) + 1/2!\, a_3(x)\,(x-t)^2 + 1/3!\, a_n(x)\,(x-t^3)] \qquad [55]$$

$$\begin{aligned} f(x) = F(x) - [&C_3 a_1(x) + (C_3 + C_2)\, a_2(x) + \left(\tfrac{1}{2}\, C_3 x^2 + C_2 x + C_1\right) a_3(x) \\ &+ (1/3!\, C_3 x^3 + 1/2!\, C_2 x^2 + C_1 x + C_o)\, a_4(x)] \end{aligned} \qquad [56]$$

De esta forma el problema de resolver la ecuación integral se reduce a resolver una ecuación diferencial y la existencia y unicidad de la solución se sigue de la existencia y unicidad del problema de Cauchy planteado.

Usando la hipótesis simplificadora $R_1 = \bar{R}_1$ y aproximando la distribución de pensionistas mediante polinomios (v.g. polinomio de tercer grado) se puede reducir el problema de la ecuación integral a encontrar la solución de una ecuación diferencial de cuarto orden, como se acaba de ver.

La función de distribución de pensionistas de jubilación (basada en datos de Seguridad Social española para 1987) es:

$$f(x - x_1) = \sum_{i=1}^{3} b_i\,(x - x_1)^i \; (x - x_1 = t - z)$$

$$b_1 = -0{,}2794 \qquad b_2 = 0{,}0598 \qquad b_3 = -0{,}0022 \qquad b_4 = -0{,}000022$$

y la distribución truncada $\lambda_1(x,t)$ viene dada por

$$\lambda_1(x,t) = \frac{f(x - x_1)}{\displaystyle\int_0^t f(t - z)\, dz} \qquad [57]$$

Los restantes valores de las funciones se obtienen a partir de los datos de las pensiones de jubilación que se supone evolucionan en función de los siguientes valores:

a) Hipótesis demográficas: Número de cotizantes inicial 7.028.074 incremento anual 1 %.

   Número de pensiones posteriores a la reforma del régimen

   130000.00 260000.00 390052.00 500208.00 650520.02

   Número de pensiones anteriores a la reforma del régimen

   115765.00 1122838.05 1089152.91 1056478.32 1024783.97

b) Hipótesis financieras. Base media de cotización 101.946 ptas./mes, variación anual 4 %. Pensión media de las pensiones posteriores a la reforma 55.187 ptas./mes variación anual 4,8 %. Pensión media de las pensiones anteriores a la reforma 42.360 variación anual 4 %.

Las funciones de la cuota de reparto vienen dadas de acuerdo con las hipótesis anteriores por

$$\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t) = 0{,}6968 + .00728\ t$$
$$\alpha_1(t) = .0004 + .0098\ t$$
$$\alpha_2(t) = .06938 - .0025\ t$$

Una variación estructural en las pensiones posteriores a la reforma, sea en la base reguladora, sea en el porcentaje de atribución, que se reduce en definitiva a una variación porcentual ω de la pensión media de estas pensiones posteriores, tendrá un efecto en la tasa de adaptación de las pensiones, en el supuesto de que las posibilidades financieras del régimen ($\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t)$) estén dadas.

Sustituyendo los valores numéricos de $K(x,t)$ y $f(x)$ en [55] y [56] la ecuación diferencial de cuarto orden se puede poner en forma de sistema de ecuaciones diferenciales, mediante un cambio de variables.

$$(y_1 = y)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_3$$

$$\frac{dy_3}{dx} = y_4 \qquad [58]$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_4}{dx} = & -0{,}2994/[p(t)\cdot\alpha_1(t)/\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t)]\cdot y_4 + 0{,}0598/[p(t)\cdot\alpha_1(t)/\\ & \overset{*}{\tilde{\alpha}}(t)]\cdot y_3 - 0{,}0022/[p(t)\cdot\alpha_1(t)/\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t)]\cdot y_2 + 0{,}00022/\\ & [p(t)\cdot\alpha_1(t)/\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t)]\cdot y_1 + \alpha_2(t)/\overset{*}{\tilde{\alpha}}(t)\\ & \left(p(t) = \int_0^t f(t-z)\,dz\right)\end{aligned}$$

con condiciones iniciales nulas.

Este sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables se puede resolver numéricamente[19], lo que permite obtener los siguientes resultados de $\exp \int_0^t \varkappa \, d\tau$ según el valor de ω (siendo $\eta = 4\ \%$) al final de cada año.

[19] J. Tonnes y V. Czitrom (1980) y F. B. Hildebrand (1974).

Año w	1	2	3	4	5
H. B. O.	1.0680	1.1080	1.1496	1.1920	1.2350
H. +0.09	1.0571	1.0836	1.1111	1.1386	1.1652
H. +0.06	1.0607	1.0917	1.1238	1.1561	1.1888
H. +0.03	1.0644	1.0999	1.1366	1.1740	1.2113
H. −0.03	1.0717	1.1164	1.1627	1.2104	1.2592
H. −0.06	1.0754	1.1247	1.1759	1.2289	1.2837
H. −0.09	1.0791	1.1331	1.1893	1.2478	1.3086

Que puesto en crecimientos interanuales se traduce en los siguientes

Año w	1	2	3	4	5
H. +0.09	.0571	.0251	.0253	.0247	.0234
H. +0.06	.0607	.0292	.0294	.0288	.0283
H. +0.03	.0644	.0334	.0334	.0329	.0318
H. −0.03	.0717	.0417	.0415	.0410	.0403
H. −0.06	.0754	.0458	.0455	.0451	.0446
H. −0.09	.0791	.0500	.0496	.0492	.0488

y cuyas diferencias con la hipótesis básica es en %

Año w	1	2	3	4	5
H. +0.09	−1.02	−1.19	−1.18	−1.17	−1.23
H. +0.06	−0.68	−0.79	−0.79	−0.78	−0.75
H. +0.03	−0.34	−0.39	−0.40	−0.39	−0.41
H. −0.03	0.35	0.40	0.38	0.40	0.41
H. −0.06	0.70	0.81	0.77	0.79	0.82
H. −0.09	1.04	1.21	1.16	1.18	1.22

Los efectos son intuitivamente evidentes, una reforma en el régimen de pensiones que aumente la pensión media de las pensiones posteriores a la reforma consumirá una parte de los recursos por cotización del régimen y, por lo tanto, las revalorizaciones tenderán a ser menores que en el caso de que no se hubiera producido la reforma. De manera inversa, cuando la reforma de un régimen de pensiones tenga como consecuencia la disminución de la pensión media de las pensiones posteriores a la reforma, esta disminución produce un alivio financiero que permite aumentar la tasa de revalorización con referencia al mismo régimen exento de reformas, y con la misma capacidad recaudadora, bien es cierto que esta mejora se hace a costa de los nuevos pensionistas. En los países occidentales existe una tendencia demográfica que va en el sentido de aumentar la proporción de los pensionistas sobre los trabajadores cotizantes, lo que puede inducir a tomar medidas para reformar los regímenes de pensiones en el sentido de reducir la pensión media de los futuros jubilados a fin de que con los recursos del régimen se pueda hacer frente con alguna garantía a las revalorizaciones de pensiones futuras, en ese sentido se promulgó en España la Ley 26/1985 de 21 de julio de medidas urgentes para la racionalización de la estructura y de la acción protectora de la Seguridad Social.

No obstante como se ve en los datos de la simulación, se precisa una considerable disminución de la pensión media de los nuevos jubilados (9 %) para conseguir aumentar la revalorización en un 1,22 % al cabo de un plazo medio de 5 años.

5. Conclusiones

Los métodos de optimización de financiación vistos se derivan del planteamiento general del problema de la programación matemática, en sentidos diferentes. El término financiación utilizado comprende tanto la cotización, que incluye cotización patronal, obrera y estatal, como los porcentajes de atribución de las prestaciones.

Las aplicaciones básicas de los métodos anteriores han sido en primer lugar la consideración conjunta de los regímenes de Seguridad Social Pública y las prestaciones complementarias y libres, previstas en el artículo 41 de la Constitución Española que ha sido objeto de regulación en la Ley 8/1987 de Planes y Fondos de Pensiones. Esta consideración conjunta de la protección social obligatoria y la libre, da lugar a un sistema con un grado de capitalización apreciable, cuya evaluación de acuerdo con unas metas supuestas da lugar mediante la aplicación de métodos de programación matemática a unas normas de cotización y de atribución de pensiones.

La aplicación realista de estos métodos precisaría una información demográfica y financiera amplia y homogeneizada tanto de la Seguridad Social Pública ((Regímenes del Sistema de Seguridad Social, Clases Pasivas, MUNPAL, ISFAS, etc.) como de las prestaciones complementarias (Planes de pensiones, Mutualidades y Previsión Complementaria) que hoy por hoy no está disponible.

Otro objetivo más ambicioso, ha sido el planteamiento de metas de inversión global, tema este que recoge el preámbulo de la Ley 8/1987 en el sentido de considerar la formación de reservas matemáticas un factor importante para estimular la inversión. El problema considerado aquí ha sido un modelo esquemático de dos ecuaciones, que es obviamente insatisfactorio para modelizar todos los efectos directos e indirectos a que puede dar lugar el desarrollo de las prestaciones complementarias, su utilización ha sido meramente ilustrativa. Un tratamiento exhaustivo del tema precisaría de un modelo amplio de la Economía Nacional que comprendiera el Sector de la Seguridad Social

Obligatorio y la complementaria, lo que de momento parece algo prematuro.

Las aplicaciones en el campo continuo están más alejadas de la econometría y la investigación en este campo necesita modelos más complejos de la Economía Nacional, expresados en forma de sistemas de ecuaciones diferenciales.

La última aplicación tratada es un problema en lós regímenes de pensiones de los países occidentales, que consiste en el aumento de la proporción pensionistas/trabajadores cotizantes. Esto da lugar a un estrangulamiento financiero que en algunos casos se ha tratado de resolver mediante reformas que impliquen modificaciones en la pensión media de los futuros pensionistas, como ha sido el caso en España de la Ley 26/1985. Este problema considerado desde el punto de vista de la tasa de revalorización que puede otorgar un régimen de pensiones con ingresos financieros determinados da lugar a una condición analítica, que no ès susceptible de abordarse con métodos de programación matemática.

La excursión por el campo de las aplicaciones de la programación matemática permite comprobar que hay posibilidades de aplicación en el terreno social, lo que no ha sido corriente en la literatura, de métodos que en general se han aplicado en terrenos puramente económicos.

Referencias

Beard, R. E.; Pentikainem, T. y Regonen E. (1984) *Risk Theory*, London, New York.

Berkowitz, D. (1976): «Optimal control theory», *American Mathematical Montnly 83*, páginas 225-239.

Burmeister, D. A. (1973): *Teorías matemáticas del crecimiento económico*, Bosch Casa Editorial.

Consael, R. (1975 a): *Seguridad Social y Crecimiento Económico*, IEFA, Bilbao.

Consael, R. (1975 b): *Seguridad Social y Coyuntura Económica*, IEFA, Bilbao.

Coppini, M. A. (1966): «Un modele pour evaluer l'incidence de l'evaluation du système de sècurité sociale au le dèvelopment du revenue national et des salaries», *Reviste International de Actuariado y Estadística de la Seguridad Social, núms. 13 y 14*, páginas 586-590.

Chow, G. C. (1981): *Econometric Analysis by Control Methods*, Wiley and Sons.

Enríquez de Salamanca, R.: «La revalorización y mejora de pensiones como problema de programación lineal». No publicado.

Enríquez de Salamanca, R. (1986): «Combinación Optima de los métodos financieros de un sistema de pensiones», *Investigaciones Económicas*, vol. X, *1* (enero), páginas 127-140.

Fair, R. C. (1974): «Methods for computing optimal central solutions on the solution of optimal control problems as Maximization problems», Anuals of Economic and Social Measurement, 3/1.

Hildebrand, F. R. (1974): *Introduction to numerical analysis*, Mc. Graw-Hill.

Kaiser, E. (1970): *Problems Centraux d'Econometrie Sociale. Etudes et Recherches* A.I.I.S., Ginebra.

Kaiser, E. (1975): «Aspectos económicos y sociales de la financiación de la Seguridad Social» IEFA, Facultad de CC.EE. y EE., Bilbao.

Kaufmann, A. y Cruon, R. (1967): *La programación dinámica,* México.
Keyfitz, N. (1974): *Mathematics of Population,* Mc. Graw-Hill.
Krasnov, M. y Kiseliev, A. (1982): *Ecuaciones Integrales,* Ed. Mir Moscú.
Martín Löf, A. (1983): «Premium control in an insurance system, an approach using contro theory», *Scandinavian Actuarial Journal*
Martínez Aguado, T. y Pauly, P. (1986): «Primeras experiencias en la aplicación del control a la Economía Española», Primeras Jornadas sobre la Economía Centro Lawrence Klein U.A.M.
Mufti, I. M. (1970): *Computational Methods in Optimal Control Problems,* J. Springer-Verlag.
Prieto Pérez, E. (1980): «Aplicaciones de la Programación matemática a la gestión de la empresa aseguradora», *Anales del Instituto de Actuarios Españoles, núm. 21,* págs. 103-118.
Tellenbach, U. (1980): «Ein Allgemeines Okonomiches Modell fur die Entwiclung einer Versicherungsgeselleschaft», XXI Congreso Internacional de Actuarios, Zurich.
Torres, J. y Critrom, V. (1980): *Métodos para la solución de problemas con computadora Digital,* R.S.I.S.A., México.
Tück, H.: «Darstellung eimer mathematischen Behandlung von nicht nach dem Anwartschattsdeckungs verfahren betriebenen Versorgungseinrichtungen», XXI, Congreso Internacional de Actuarios, Zurich.

Abstract

The financial problems of the Social Security Systems, as well as the scheeme evolution and the valuation of a pension scheeme with lifetime contributions, can be formalize as mathematical programing problems. From this emerges the possibility to characterize analitically optimal solutions.

Recepción del original, febrero de 1989
Versión final, julio de 1989