Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XI, n.º 3 (1987), págs. 375-398

TEORIAS ALTERNATIVAS DE LA UTILIDAD ESPERADA: UNA INTERPRETACION EN TERMINOS DE BIENESTAR SOCIAL

Carmen HERRERO*
Universidad de Alicante

La especificación de funciones de bienestar social sobre distribuciones alternativas de la renta de una determinada población, como medida de la «deseabilidad social» de dichas distribuciones puede analizarse, en términos formales, de modo análogo a la existencia de funciones de utilidad en condiciones de riesgo. No obstante, la interpretación directa de la teoría Von Neumann Morgenstern supone severas restricciones sobre el tipo de indicadores admisibles. Un rasgo común a un amplio grupo de teorías alternativas de la utilidad esperada es el de hacer especial hincapié en la relevancia de la comparación entre pares alternativos de loterías (supuesto que, en el contexto de comparación entre distribuciones de la renta resulta muy adecuado). La traslación de las teorías alternativas al contexto de evaluación del bienestar social abre un nuevo camino para este problema que, en este trabajo se esboza a partir de la teoría SSB de Fishburn (1982, 1984).

1. Introducción

El proceso de especificación de fórmulas de evaluación del bienestar social asociado a distribuciones alternativas de la renta para una determinada población puede analizarse, en términos formales, de modo análogo al problema de la existencia de funciones de utilidad individual en condiciones de riesgo. Esta analogía formal es aprovechada, por ejemplo, en el trabajo de Atkinson (1970) para construir sus índices de desigualdad tomando como idea de referencia el concepto de «equivalente cierto» de una lotería.

Desde esta perspectiva, la adopción del marco formal desarrollado por Von Neumann y Morgenstern (1944) permite la construcción de indicadores que asocian un número real a cada posible distribución de la renta, de tal manera

* Este trabajo fue realizado durante mi visita al Instituto de Análisis Económico de Barcelona, en los meses de mayo-junio de 1986. Agradezco todas las facilidades y colaboración allí encontradas, tanto en el Instituto como en el Departamento de Análisis Económico de la U.A.B., así como el apoyo financiero de la CAICYT mediante los proyectos 2361 y 3566/83. Los comentarios y sugerencias de A. Villar merecen mención aparte. Finalmente, quisiera agradecer las sugerencia del *referee,* que han contribuido a clarificar notablemente la exposición. Los errores y defectos restantes son de mi exclusiva responsablilidad.

que un mayor valor del indicador corresponde a una distribución más preferida. Según cuáles sean los tipos de juicios de valor adoptados, los indicadores Von Neumann-Morgenstern (VNM), pueden adaptarse a diversas formas de combinar funcionalmente las variables relevantes en el análisis del bienestar social: así, resultan ser indicadores VNM funcionales del tipo siguiente:

$$w_1(p) = K_l(p)/\mu(p); \quad w_2(p) = \mu(p) - T(p)$$

donde $\mu(p)$ es la media de la distribución p y $K_l(p)$, $T(p)$ los índices de desigualdad de Kolm (1976 a, b) y Theil (1968), respectivamente.

Hay que observar que la construcción de indicadores VNM sólo es posible si se supone que la relación binaria de preferencia social sobre las distribuciones de renta verifica los axiomas de ordenación completa, continuidad e independencia.

Existe, no obstante, un fenómeno importante que se escapa a este tipo de formulación: la posible dependencia, en el criterio de evaluación de una cierta distribución de aquélla (o aquéllas) con las que está siendo comparada. Esta dependencia no es sólo una consideración teórica, sino que parece confirmada sistemáticamente en estudios empíricos [véanse, por ejemplo, Van Praag (1971, 1985a, b), Van Praag y Kapteyn (1973), Van Praag, Hagenaars y Van Weeren (1982)]. Si interpretamos el indicador como una Función de Bienestar Social, es claro que la valoración de los individuos del cambio de q a p depende crucialmente de cuál es la situación de cada individuo en p, y cuál era su situación en q.

La conveniencia de enfocar el problema de la evaluación del bienestar en términos de un indicador que dependa de los pares de distribuciones comparadas presenta un paralelismo evidente con la idea subyacente a un amplio grupo de teorías alternativas de la utilidad esperada, en las que se coloca el énfasis en que la valoración del individuo cambia dependiendo de cuál sea el par de loterías que está comparando [véanse, por ejemplo, Loomes y Sudgen (1982), Bell (1982, 1983) y Fishburn (1982, 1984)]. Un camino natural, por tanto, de enriquecer nuestro análisis desde esta perspectiva consistiría en tomar en consideración las mencionadas teorías alternativas de la utilidad esperada y trasladarlas al problema de especificación de fórmulas de evaluación del bienestar social a partir de distribuciones de la renta.

El problema fundamental que presenta este enfoque más general es el poder asegurar la decisoriedad de la relación de preferencia que modeliza, esto es, en términos formales, el asegurar la existencia de elementos maximales para la relación binaria en determinados subconjuntos. Como es bien sabido, cuando la relación de preferencia es representable mediante una función continua con valores reales, un teorema clásico de Weierstrass asegura que alcanza su máximo en cualquier conjunto compacto. Al perder la posibilidad de representar la relación de preferencia por medio de una función continua, hay que utilizar otras vías para asegurar la existencia de elementos maximales de la relación binaria de base.

Entre las teorías alternativas de la utilidad esperada mencionadas, la desarrollada por Fishburn (1982. 1984) (o teoría SSB), posee la propiedad de que, aun en presencia de ciclos, permite elegir en la envoltura convexa del conjunto considerado. Esto es, la relación de preferencia posee elementos maximales en la envoltura convexa de cualquier conjunto finito. Ello posee interesantes implicaciones en el caso que nos ocupa, y este hecho, junto con la circunstancia de que dicha teoría es la más general y la más elaborada de las que plantean el problema desde la perspectiva que nos interesa, la convierten en la más seria candidata a dar resultados interesantes en su reformulación desde la perspectiva de bienestar social.

Un tema particularmente relevante en la evaluación social de distribuciones alternativas de la renta es el análisis de la compatibilidad de la relación binaria que soporta el orden social con el principio de transferencias. En el contexto elegido, la deseabilidad social por las distribuciones igualitarias resulta formalmente análoga a la aversión al riesgo en el caso de un agente que elige en un contexto estocástico. Este hecho permite identificar las formas funcionales compatibles con el principio de transferencias, tanto en la teoría VNM, como en la SSB de Fishburn.

El término «indicador de bienestar» se emplea como un concepto algo más general que una función de bienestar social. Una Función de Bienestar Social es un indicador de bienestar social, pero también puede serlo la evaluación de un «observador ético», caracterizado por determinados juicios de valor. Los indicadores que se analizan en este trabajo son adaptables a ambos supuestos.

La sección 2 introduce el marco formal que permite realizar la traducción de las teorías de elección racional en condiciones de riesgo a nuestro problema, y revisa el caso clásico, lo que podríamos llamar «indicadores Von Neumann-Morgenstern» (VNM). La sección 3 analiza las limitaciones de los indicadores VNM y critica los supuestos en que descansan, desde nuestro punto de vista. Una revisión de las teorías alternativas de la utilidad esperada permite seleccionar el tipo de indicadores adecuados a nuestro campo que se pueden obtener mediante una traslación de algunas de dichas teorías. La sección 4 ofrece una reinterpretación de la teoría SSB de Fishburn, presentando los «indicadores SSB». La sección 5 con algunos comentarios finales, cierra el trabajo.

2. Indicadores de bienestar social basados en la teoría clásica de la utilidad esperada

Consideremos una población, y para ella, la distribución de renta de sus individuos. Pretendemos utilizar el marco formal de la teoría de la utilidad en condiciones de riesgo para proporcionar una forma de valoración social de las distintas distribuciones de la renta. Para ello, comenzamos realizando una normalización de nuestra población, considerando, para cada estrato de renta, la proporción de individuos con dicha renta actual.

Sea $I = [0, \infty)$ la semirrecta positiva real y consideremos el conjunto de distribuciones de probabilidad simples sobre I;

$$P = \{p : I \rightarrow [0,1] \mid \text{soporte de } p \text{ es finito y } \sum_{x \in I} p(x) = 1\}^{1}$$

Dada $p \in P$, interpretamos $p(x)$ como la proporción de población (o frecuencia relativa de población) con renta x.

Entre los elemenos de P existen algunos distinguidos: aquellas distribuciones $px: I \rightarrow [0, 1] \mid px(x) = 1; px(y) = 0$ para todo $y \neq x$. Identificamos $px \equiv x$ (es decir, desde ahora, cuando hablemos de un elemento $x \in P$ nos referiremos a la distribución px, que corresponde a aquél estado de la sociedad en que toda la población tiene renta x).

En la formulación anterior, el número total de individuos de la población resulta irrelevante, es decir, las «réplicas» de una determinada población son indistinguibles. Esto equivale a asumir el «axioma de simetría» para la población [véase Sen (1973, pág. 59)]. Por otro lado, la media $\mu(p) = \Sigma\, xp(x)$ representa la *renta per cápita*. Poblaciones con idéntica media (si corresponden al mismo número de individuos) son distribuciones alternativas de un monto total de renta.

No todas las distribuciones $p \in P$ pueden considerarse igualmente deseables socialmente (ya sea desde un punto de vista ético o tomando en consideración las preferencias individuales de los miembros de la sociedad). Desde esta perspectiva, podemos plantearnos la existencia de una relación binaria $\geqslant$ sobre P que especifique las valoraciones sociales entre las diversas alternativas.

Las propiedades de $\geqslant$ implicarán una mayor o menor facilidad para determinar, entre un conjunto de alternativas, si existirá alguna que sea socialmente preferida a las demás. En este sentido, sería deseable poder representar $\geqslant$ mediante un indicador (funcional) de bienestar $w: P \rightarrow R$.

La existencia de una funcional continua w que represente la relación $\geqslant$ depende de ciertas propiedades mínimas de la relación binaria: completitud, reflexividad, transitividad y continuidad [véase, por ejemplo, Chipman (1960)]. Supuestos adicionales conducen a órdenes cuyo cómputo resulta particularmente simple. Comenzaremos introduciendo el axioma adicional de independencia y la teoría análoga a la de la utilidad individual en condiciones de riesgo, lo que nos conducirá a los indicadores Von Neumann-Morgenstern (VNM).

[1] P es un conjunto convexo (en el espacio de las aplicaciones de I en R). Puede ser mirado como un *mixtur-set*.

2.1. *Indicadores de bienestar social VNM*

Supongamos que se dispone de una relación binaria $\geqslant$ sobre P, verificando los siguientes supuestos:

A.1 (ordenación) $\geqslant$ es reflexiva, completa y transitiva.

A.2 (continuidad). Si $p > q > r$, entonces existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\alpha p + (1 - \alpha) r \sim q$$

A.3 (independencia). Si $p > q$, entonces $\alpha p + (1 - \alpha) r > \alpha q + (1 - \alpha) r$

para todo $r \in P$

Bajo los supuestos A.1, A.2 y A.3, el orden débil $\geqslant$ sobre P puede representarse mediante una funcional

$$w: P \rightarrow R$$

continua, de tal modo que $p \geqslant q$ si y sólo si $w(p) \geqslant w(q)$, y w es única salvo transformaciones del tipo $w' = aw + b$, $a > 0$ (lo que supone una medición cardinal del bienestar asociado a la distribución p). Además, en este caso, se verifica

$$w(p) = \sum_x w(x) p(x) \qquad [1]$$

donde $w(x)$ puede interpretarse como el valor que toma w sobre la distribución igualitaria x (aquélla en que toda la población tiene renta x). Obsérvese que los valores $w(x)$ pueden identificarse con la función de utilidad (de Bernoiulli) sobre los sucesos ciertos [véase, por ejemplo, Herstein y Milnor (1953)]. Una interpretación de la relación [1] sería la siguiente: si $w(x)$ es la valoración social de la distribución igualitaria con media x, medimos la valoración social de la distribución p mediante una suma ponderada, dando peso $w(x)$ a todos los individuos cuya renta actual es x.

La ventaja que tiene el disponer de una expresión del tipo [1] para determinar el indicador w en la distribución p radica en el hecho de que, en estas condiciones, *basta con conocer la evaluación social* (conocer el valor del indicador) *sobre las distribuciones igualitarias para poder evaluar socialmente cualquier posible distribución.*

Así pues, si $\geqslant$ verifica los supuestos A.1, A.2 y A.3, y se conoce el valor del indicador w sobre las distribuciones igualitarias, es posible calcular su valor para cualquier otra distribución, sin necesidad de agregar preferencias individuales en cada caso. De este modo, cuando se posee la capacidad para describir la evolución el bienestar de una sociedad igualitaria a medida que crece su renta, los supuestos A.1-A.3 proporcionan condiciones precisas en las que, partiendo de dicho conocimiento, resulta posible evaluar cualquier otra distribución.

Atkinson (1970) propone implícitamente como medida de bienestar la siguiente: $W(p) = (y^*)/\mu(p)$, donde y^* es el equivalente equidistribuido, medida que resulta ser un indicador del tipo VNM.

Por otro lado, y teniendo en cuenta el estudio sobre la relación entre funciones de bienestar social e índices de desigualdad realizado por Blackorby y Donaldson (1978) señalemos que, dado que los indicadores VNM son homotéticos, pueden ser mirados como funciones de bienestar social asociados a un único índice de desigualdad relativa.

2.2. *Dominancia estocástica. Transferencias. Formas funcionales compatibles con el principio de Dalton*

Los axiomas A.1, A.2 y A.3 garantizan el que la relación binaria social $\geqslant$ definida en P sea expresable mediante una función $w: P \to R$ satisfaciendo [1], pero no especifican en absoluto las propiedades de dicha funcional. Dicho de otro modo, si deseamos que w incorpore una *valoración ética* del bienestar de la sociedad vinculado a una determinada distribución, debemos asumir sobre el orden $\geqslant$ propiedades adicionales que reflejen los criterios éticos de valoración.

Desde una perspectiva igualitaria, una de las propiedades mínimas que w debería cumplir es su *consistencia con el principio de Dalton* (1920), es decir, que manteniéndose la renta total, transferencias de los más ricos a los más pobres deben conducir a una situación social más deseable [esto es, si p, $q \in P$ y q se obtiene de p por transferencia de renta de los más ricos a los más pobres, entonces $w(p) < w(q)$].

La idea anterior compara distribuciones con la *misma renta total.* En nuestro caso, entonces consideraremos, para el análisis de la compatibilidad de la funcional w con el principio de transferencias, únicamente aquellas distribuciones *con idéntica media.*

Sea $P_\mu = \{p \in P \mid \Sigma\, xp(x) = \mu\}$. Para analizar el principio de transferencias, consideremos previamente la idea de «acumulaciones».

Dada $q \in P$, definimos las *acumulaciones sucesivas* de q, $Q^{(n)}$ de la siguiente manera;

$$Q^{(1)}(x) = \sum_{y \leq x} q(y); \ldots; Q^{(n+1)}(x) = \int_0^x Q^{(n)}(y)\, dy; \ldots$$

Sea ahora q, $r \in P_\mu$. Definimos la *dominancia estocástica de grado n, «$>n$» en P_μ* como sigue:

$$«q >n\ r» \text{ si } q \neq r \text{ y } Q^{(n)}(x) \leqslant R^{(n)}(x) \text{ para todo } x \in I$$

$$«q > \infty\ r» \text{ si } q >n\ r \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots$$

Consideremos las siguientes familias de funciones:

$Vn = \{v: I \rightarrow R \mid v \in C^{\infty}(I), v^k > 0$ para k impar, $k \leqslant n, v^k < 0$ para k para, $k \leqslant n\}$

donde v^k indica la derivada de orden k de la función v. Así, V_1 son funciones crecientes, V_2 son funciones crecientes y cóncavas, etc.

El siguiente teorema caracteriza la dominancia estocástica mediante una forma específica de «combinaciones» utilizando funciones de Vn. Este teorema se utilizará en la determinación de las formas funcionales para w compatibles con el principio de Dalton.

Teorema 1 (Fishburn, 1980; Fishburn y Willig, 1984).

Para todo p, $q \in P_\mu$ y $n = 2, 3, \ldots$

$$p >/ n\ q \text{ si y sólo si } \Sigma\, v(x)p(x) > \Sigma\, v(x)q(x) \text{ para toda } v \in Vn$$

Además, $-\exp(-ax) \in Vn$ para todo n, con $a > 0$, y se tiene

$p > \infty\ q$ si y sólo si $\Sigma(-\exp(-ax))p(x) > \Sigma(-\exp(-ax))q(x)$ para todo $a > 0$.

Es decir, V^{∞} contiene sumas de exponenciales $-\Sigma\, \lambda_i \exp(-a_i x)$, con a_i, $\lambda_i > 0$, pero las exponenciales simples, $-\exp(-ax)$, $a > 0$, son suficientes para especificar $> \infty$ con toda precisión.)

En la definición de dominancia estocástica, si nos limitamos a «> 1», y nos situamos sobre P, se obtiene:

$$«p > 1\ q» \text{ si y sólo si } \Sigma\, xp(x) > \Sigma\, xq(x)$$

es decir, que «> 1» es simplemente la dominancia en media. Si nos restringimos al conjunto P_μ, entonces «> 1» no tiene sentido, es por esto que en el teorema 1 se habla únicamente de «$> n$» para $n = 2, 3, \ldots$

Las expresiones $\Sigma\, v(x)p(x)$ del teorema 1 «recuerdan» a la expresión [1]. Si $w(x) = v(x)$, para una cierta función $v \in Vn$, el teorema anterior vincularía la dominancia estocástica de orden n, $p > n\ q$, con la relación $w(p) > w(q)$, en tal caso. Por este motivo el teorema 1 asocia las ideas de dominancia estocástica con el hecho de que $w(x)$ (esto es, el valor del indicador de bienestar social definido sobre las distribuciones igualitarias) pertenezca a un cierto conjunto de funciones (el Vn, si deseamos dominancia estocástica de orden n, el V^{∞}, si deseamos dominancia estocástica de cualquier orden).

El interés del concepto de dominancia estocástica y el resultado explicitado en el teorema anterior radican en su vinculación con el principio de Dalton. Esta vinculación quedará claramente establecida mediante el *concepto de transferencias*.

Fijos α, x, δ, definimos

$$T^1(\alpha, x, \delta) = \begin{cases} -\alpha & \text{para } y = x \\ \alpha & \text{para } y = x + \delta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y las transferencias de orden superior:

$$T^2(\alpha, x, \delta) = T^1(\alpha, x, \delta) - T^1(\alpha, x + \delta, \delta)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T^{n+1}(\alpha, x, \delta) = T^n(\alpha, x, \delta) - T^n(\alpha, x + \delta, \delta)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Obsérvese que la primera transferencia que tiene sentido manteniéndose la renta total es T^2. T^{n+1} se forma emparejando una transferencia de orden n con la opuesta de una transferencia análoga a niveles de renta uniformemente más altos $(+\delta)$. Una transferencia de la forma T^{n+1} cambia la proporción de sociedad a nivel de renta $x + k\delta$ por

$$(-1)^{k+1}\binom{n+1}{\mathrm{k}}\alpha \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, n + 1$$

Así, el efecto de $T^2(\alpha, \mathrm{x}, \delta)$ consiste en transferir una cantidad δ de α individuos con renta $x + 2\delta$, a α individuos con renta x, quedando 2α individuos nuevos con renta $x + \delta$, obteniéndose una distribución más igualitaria.

El siguiente teorema vincula la dominancia estocástica con las relaciones de transferencia:

Teorema 2 (Fishburn y Willig, 1984). Las tres condiciones siguientes son equivalentes:

a) **Para todo $p, q \in P_\mu$, para todo $m \in \{2, 3, \dots, n\}$, $w(p) > w(q)$ cuando $p = q + T^m(\alpha, x, \delta)$.**

b) **$w(x) \in Vn$ y se verifica que $p >n\ q \Rightarrow w(p) > w(q)$.**

c) **$p >\infty\ q \Rightarrow w(p) > w(q)$.**

En el teorema 2 se establece, pues, la vinculación entre la relación $\geqslant$ sobre las distribuciones de renta, cuando ésta está expresada por [1], con la forma funcional de $w(x)$ (indicador de bienestar sobre las distribuciones igualitarias) y su compatibilidad con el principio de transferencias. A *grosso modo* podríamos decir que para que un indicador VNM sea compatible con el principio de transferencias necesitamos que $w(x)$ (que puede mirarse como una función w: $I \rightarrow R$) pertenezca a Vn, y las dominancias impliquen un crecimiento en el bienestar. Es interesante observar que dominancias estocásticas de mayor orden suponen una mayor aversión a la desigualdad, por lo que el bienestar asociado a la misma distribución de la renta será menor cuanto mayor grado de dominancia estocástica presente el indicador de bienestar.

3. Consideraciones sobre los indicadores VNM y teorías alternativas de la utilidad esperada

Los indicadores de bienestar social VNM incorporan los juicios de valor en la forma específica de la función

$$w: I \rightarrow R$$

definida sobre las distribuciones igualitarias. La especificación de la función w aporta la posibilidad de aunar (o agregar) criterios de valor múltiples de tal forma que tal agregación conduzca a un orden completo de *todas* las posibles distribuciones de la renta. Así pues, si nos preocupan dos parámetros concretos para «indicar» el bienestar de una población (digamos igualdad y renta per cápita), cada $w(x)$ elegida proporcionará una cierta forma de *agregación diferenciada* (o, dicho de otro modo, un grado de sustitución establecido *a priori)* entre los parámetros que nos interesan, y que permite ordenar todas las alternativas posibles.

Así, por ejemplo, si elegimos $w(x) = Lx$, obtendremos

$$w(p) = \Sigma\, p(x)\, Lx$$

y, en este caso se obtiene

$$w(p) = \mu(p) - T(p)$$

donde $\mu(p)$ es la media de la distribución p, y $T(p)$ es el segundo índice de desigualdad de Theil (1968) para la distribución p.

Si tomamos $w(x) = \exp(-ax)$, $a > 0$, obtendríamos

$$w(p) = \Sigma \exp(-ax)p(x)$$

y, en este caso, se tendrá

$$w(p) = K_I(p, a)/\mu(p)$$

donde $K_I(p, a)$ es el índice de Kolm (1976a, b).

(Obsérvese que las formas funcionales adoptadas en estos ejemplos son compatibles con el principio de transferencias.)

Así, los indicadores de bienestar social VNM poseen la cualidad de ordenar completamente las distribuciones posibles, de modo que proporcionan un criterio decisorio de evaluación en todas las circunstancias. Esta ventaja, no obstante, se consigue a costa de asumir los supuestos A.1, A.2 y A.3 antes mencionados.

El supuesto A.1, en particular, asume la transitividad de la relación binaria $\geqslant$ que soporta las preferencias sociales sobre P. La aceptación de este supuesto en el contexto que nos ocupa impone severas restricciones a las posibles formas de construir indicadores de bienestar. Si interpretamos estos indicadores como funciones de bienestar social en el sentido de Arrow, los resultados de imposibilidad surgen inevitablemente si no introducimos comparaciones interpersonales de utilidad: recuérdese que la cardinalidad de las funciones de utilidad no elimina el resultado [véase Sen (1970)]. Si, por el contrario, interpretamos tales índices como valoraciones de un observador ético, entonces la transitividad impide el empleo de criterios múltiples de valoración: por ejemplo, si el criterio es el de computar tanto la dispersión como la media (es decir, dada una renta per cápita, más igualdad es preferida, y dado un nivel de desigualdad, mayor renta per cápita es preferida), la agregación de ambas ordenaciones vuelve a provocar idénticos resultados de imposibilidad. Es por ello que los indicadores VNM proporcionan una forma determinada de agregación, que supone una «sustituibilidad predeterminada» entre los diversos parámetros a considerar en la valoración social de las distribuciones alternativas. En cualquier caso, si el orden $\geqslant$ es un agregado, bien de órdenes particulares de los individuos, bien de órdenes sociales establecidos sobre criterios éticos, resulta más conveniente relajar el supuesto de que $\geqslant$ sea transitiva, para no caer en los problemas de imposibilidad, o, alternativamente, no tener que, *a priori,* restringir nuestra forma de agregación excesivamente, en aras de obtener una relación necesariamente transitiva [véase, en este sentido Blair y Pollak (1982)].

El supuesto A.2 es un supuesto de tipo técnico, inevitable si deseamos que nuestro indicador tenga forma de funcional continua. Por otro lado, si se mantiene el supuesto A.1, la supresión del supuesto A.2 conduce a órdenes de tipo lexicográfico [véase Chipman (1960), o Fishburn (1968)].

El supuesto A.3, por su parte, es el famoso axioma de independencia que ha dado origen a la mayor parte de la literatura alternativa en términos de elección individual en un contexto estocástico. El fenómeno de *reversión de las preferencias* se ha achacado, generalmente, a la mala adecuación del supuesto de independencia en el contexto de elección en condiciones de riesgo [véase Holt (1986)].

En nuestro caso, el supuesto A.3 tiene como consecuencia fundamental ventajas de tipo computacional y operativo. Por ejemplo, si w se interpreta como una Función de Bienestar Social, A.3 implica que ésta es homotética, lo cual la hace particularmente interesante desde el punto de vista de su relación con índices de desigualdad [no obstante, los problemas de vinculación entre medidas de desigualdad y funciones de bienestar social en ausencia de homotecia son importantes, como se discute en Esteban (1976)]. Por otro lado, y dejando aparte las ventajas computacionales, no parece haber ninguna razón de principio que lleve a rechazar este supuesto en nuestra teoría.

Existen numerosas teorías alternativas a la clásica de la utilidad esperada de Von Neumann y Morgenstern que han surgido a raíz de las críticas a la misma derivadas de la evidencia empírica. La descripción de diversos experimentos cuyos resultados violan la teoría de la utilidad esperada tanto con pagos hipotéticos [Allais (1952, 1953), McCrimmon y Larsson (1979), Kahneman y Tversky (1979), Slovic y Lichtenstein (1983)], como con incentivos monetarios [Grether (1978), Grether y Plott (1979)] o reales [Battalio, Kagel y McDonald (1985)] han dado origen a nuevas teorías elaboradas sobre supuestos más débiles.

En primer lugar, y pasando revista a aquellas teorías que eliminan el supuesto A.3 de independencia, ocurre que, en su inmensa mayoría, mantienen la transitividad de la relación binaria de base, por lo que su reinterpretación en nuestro contexto no resulta particularmente interesante. Tal es el caso de las teorías debidas a Chew y McCrimmon (1979), Chew (1982, 1983), Machina (1982) y Fishburn (1983).

Sólo una teoría alternativa a la de Von Neumann y Morgenstern abandona el axioma de continuidad; la elaborada por Fishburn (1979). En ella, asimismo, se abandona el supuesto A.1, y la formulación planteada conduce a preferencias no transitivas, pero sí acíclicas. Es interesante destacar que, en este planteamiento, I se considera finito, y que se obtiene una regla de comparación tipo *leximin.*

Tres teorías diferentes en las que se abandona el supuesto A.1 aparecen en la literatura: Loomes y Sudgen (1982), Bell (1982, 1985) y Fishburn (1982, 1984). Aunque estas teorías se desarrollaron independientemente, tienen un punto de partida común. La idea común subyacente es que la comparación entre dos loterías alternativas (distribuciones de la renta, en nuestro caso) genera interdependencias entre las alternativas comparadas: *no se puede medir directamente la satisfacción de p o de q, sino la de p relativa a q, y viceversa.* Esto es, este grupo de teorías adoptan una forma funcional, de tal modo que

$$p > q \text{ si y sólo si } \phi(p, q) > 0, \text{ donde } \phi: P \times P \rightarrow R$$

Dada entonces la funcional ϕ, la preferencia se asocia con la positividad de ϕ, la indiferencia con el que ϕ tome valor cero. ϕ se toma *hemisimétrica,* es decir, $\phi(p, q) = -\phi(q, p)$. Ello supone que $\phi(p, p) = 0$, esto es, $p \sim p$, y que $\phi(p, q)$ es negativa cuando $\phi(q, p)$ es positiva.

Este planteamiento admite violaciones del axioma A.1, cuando la valoración de una alternativa depende crucialmente de con qué otra alternativa se está comparando. Sin embargo, si se da el caso de que ϕ admite una determinada descomposición, en la forma

$$\phi(p, q) = v(p) - v(q)$$

entonces $p > q$ si y sólo si $v(p) > v(q)$, y las preferencias tipo VNM se obtendrían como un caso particular del mencionado.

La idea de base de este grupo de teorías presenta un paralelismo evidente con la consideración de que la valoración social de una cierta distribución de la renta, p, depende crucialmente de con qué otra distribución alternativa, q, se esté comparando. Aparte las justificaciones de tipo teórico, se dispone de evidencia empírica suficiente para afirmar que la valoración que los individuos dan a determinados niveles de renta dependen de cuál sea su nivel de renta actual y sus previsiones de renta a futuro [véanse, por ejemplo, Van Praag (1971, 1985a, b); Van Praag y Kapteyn (1973); Van Pragg, Hagener y Van Weeren (1982)]. Ello significa que si se adopta un sistema de agregación tipo Función de Bienestar Social, debe tomarse en consideración, al valorar las distintas distribuciones, la adecuación de realizar valoraciones asociadas a cada par de distribuciones alternativas que se comparen.

Entre las teorías alternativas que abandonan el supuesto A.1, la elaborada por Fishburn (1982, 1984) (teoría SSB), es la más formalizada y la más general. Por otro lado, proporciona resultados de decisoriedad con implicaciones realmente interesantes desde el punto de vista de nuestra reformulación. Ello justifica que hayamos seleccionado la teoría SSB para ser vertida al contexto de la construcción de indicadores de bienestar social. En la sección siguiente, construimos los «indicadores SSB», derivados de la reinterpretación de dicha teoría.

4. Indicadores de bienestar social SSB

Fishburn (1982) mantiene el axioma de continuidad A.2, y utiliza otros dos axiomas, eliminando A.1 y A.3:

A.D (dominancia-convexidad)

a) **Si $p > q$, y $p \geqslant r \Rightarrow p > \lambda q + (1 - \lambda)r$ para todo $0 < \lambda \leqslant 1$.**
b) **Si $q > p$, y $r \geqslant p \Rightarrow \lambda q + (1 - \lambda)r > p$ para todo $0 < \lambda \leqslant 1$.**
c) **Si $p \sim q$, y $p \sim r \Rightarrow p \sim \lambda q + (1 - \lambda)r$ para todo $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.**

A.S (simetría). Supongamos que $p > q$, $q > r$, $p > r$, $q \sim {}^1/_2 p + {}^1/_2 r$. Entonces, $\lambda p + (1 - \lambda)r \sim {}^1/_2 p + {}^1/_2 q$ si y sólo si $\lambda r + (1 - \lambda)p \sim {}^1/_2 r + {}^1/_2 q$.

El axioma A.D conserva ciertos vestigios del axioma de linealidad, pero haciendo todas las comparaciones contra una distribución fija, p. En términos más formales, indica que la relación de preferencia es simultáneamente cuasicóncava y cuasiconvexa.

El axioma A.S es una condición de simetría o equilibrio, y menos formalmente podría expresarse: «si la sociedad en q está igual que cuando la mitad de ella está en p y la otra mitad en r, entonces cualquier otra situación que produzca el mismo bienestar social utilizando las distribuciones p, q y r, debe mantenerse cuando p y r se intercambian entre sí».

Con los axiomas indicados, se obtiene el resultado siguiente:

Teorema 3 (Fishburn, 1982). Los axiomas A.2, A.D y A.S se verifican para $\geqslant$ sobre P si y sólo si existe una funcional $\phi: P \times P \rightarrow R$ bilineal hemisimétrica (SSB) tal que, para todo $p, q \in P$, $p > q$ si y sólo si $\phi(p, q) > 0$. Además, ϕ es única salvo transformaciones de semejanza.

La bilinealidad de ϕ hace que la restricción de ϕ a los pares de distribuciones igualitarias sea suficiente para calcular el valor de ϕ en cualquier otro par de distribuciones, es decir,

$$\phi(p, q) = \sum_x \sum_y p(x) q(y) \phi(x, y) \qquad [2]$$

Es interesante observar la similitud de las expresiones [2] y [1]. De hecho, [2] es una extensión de [1] en la que los coeficientes $\phi(x,y)$ que miden la «satisfacción social» del cambio de la distribución igualitaria con media x a la distribución igualitaria con media y, están incorporando *diferencias entre cada par de situaciones*, que son relevantes a la hora de comparar el bienestar de la sociedad en una situación (p) relativamente a otra (q). Si se interpreta $\phi(x,y)$ como la «satisfacción social» del cambio de la distribución igualitaria con media y a la distribución igualitaria con media x, la fórmula [2] supone computar, con peso $F(x,y)$ el número de individuos (relativo) que han pasado a tener renta x (en p) con la condición de que tenían renta y (en q). Si el valor así obtenido resulta positivo, ello indicaría que la sociedad se encuentra «en conjunto» más satisfecha en p que lo estaba en q (o que valora positivamente el cambio de q a p). Así, si se posee la capacidad para describir la evolución del bienestar de una sociedad igualitaria, conociendo con precisión el incremento de tal bienestar asociado a cada incremento en la renta per cápita, los supuestos A.2, A.D y A.S proporcionan las condiciones bajo las cuales, partiendo del conocimiento de dicha evolución en el caso igualitario, es posible comparar cualquier par de distribuciones.

Cuando $\sim$ es transitiva, entonces, con la formulación anterior, $\geqslant$ también lo es, y, en ese caso, existen funcionales lineales $u, v: P \to R$, con v no negativa, tales que

$$\phi(p, q) = u(p)v(q) - u(q)v(p)$$

obteniéndose, como caso particular, la formulación de Chew y McCrimmon (1979). Con esta formulación, los autores mencionados realizan un análisis en términos de renta, pero con la relación transitiva.

Según se ha comentado antes, el cálculo de $\phi(p, q)$ se reduce, por la bilinealidad de ϕ, al conocimiento de $\phi(x, y)$ para todos los pares de distribuciones igualitarias. Si $p, q \in P$, puede calcularse $\phi(p, q)$ mediante el producto

$$p(x)\ A\ q(y)$$

donde A es la matriz de los $\phi(x, y)$, y $p(x)$, $q(y)$ son vectores fila y columna, respectivamente, que explicitan las distribuciones p y q variando x e y en el conjunto finito $S = \operatorname{sop} p \cup \operatorname{sop} q$.

EJEMPLO 1. Supongamos que $\phi(x,y) = (x - y)^{1/2}$, para $x \geqslant y$, en el caso de distribuciones igualitarias, y calculemos $\phi(p, q)$ para algunas distribuciones:

$p \equiv \{p(3) = 0{,}52;\ \mathrm{p}(1) = 0{,}48\}$; $q \equiv \{q(2) = 1\}$; $r \equiv \{r(4) = 0{,}4;\ r(1) = 0{,}6\}$

Los únicos puntos que aparecen en la unión de los soportes de p, q, r son $\{1, 2, 3, 4\}$. De este modo, las distribuciones podrían escribirse en forma vectorial del siguiente modo:

$$p = (0{,}48;\ 0;\ 0{,}52;\ 0);\ q = (0,\ 1,\ 0,\ 0);\ r = (0{,}6;\ 0;\ 0;\ 0{,}4)$$

La matriz asociada a estos cuatros elementos sería:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1{,}41 & -1{,}71 \\ 1 & 0 & -1 & -1{,}41 \\ 1{,}41 & 1 & 0 & -1 \\ 1.71 & 1{,}41 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene

$$\phi(p, q) = 0{,}04 > 0 \Rightarrow p > q;\ \phi(q, r) = 0{,}034 > 0 \Rightarrow q > r;$$
$$\phi(r, p) = 0{,}099 \geqslant 0 \Rightarrow r > p$$

lo que muestra la no transitividad de esta relación.

Por otro lado, si consideramos ahora

$$p \equiv \{p(1) = 0{,}5; p(3) = 0{,}5\} \quad ; \quad q \equiv \{q(2) = 1\} \quad ; \quad r \equiv \{r(3) = 1\}$$

se tiene entonces

$$\phi(p, q) = 0 \Rightarrow p \sim q.$$

Sin embargo, no se verifica

$$\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}r \sim \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}r$$

sino que

$$\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}r > \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}r$$

En el contexto de una formulación como la precedente, aparecen inmediatamente dos tipos de problemas. En primer lugar, el garantizar la posibilidad de elección ante diversas alternativas, esto es, analizar las condiciones bajo las cuales puede asegurarse la existencia de elementos maximales en la relación de preferencia. En segundo lugar, analizar la forma en que las valoraciones éticas se pueden incorporar a este tipo de formulación, en particular, bajo qué condiciones el indicador bilineal ϕ es capaz de incorporar el requisito de compatibilidad con el principio de transferencias.

En la sección siguiente analizaremos el problema de la incorporación de valoraciones éticas tipo transferencias de Dalton, obteniendo resultados análogos a los de la teoría VNM, reservando la sección siguiente para ofrecer los resultados de racionalidad en la elección en el caso de indicadores de bienestar tipo SSB.

4.1. *Dominancia estocástica en la teoría SSB. Transferencias*

El planteamiento derivado de la teoría SSB aplicada al bienestar social indica que, sobre los elementos de P existe una relación binaria $\geqslant$, representativa de las preferencias sociales, explicitada mediante una funcional bilineal hemisimétrica

$$\phi : P \times P \rightarrow R$$

de tal manera que $\phi(p, q) > 0$ si y sólo si $p > q$.

Por otro lado, la bilinealidad de ϕ, junto con la identificación $p_x \equiv x$, cuando p_x es el elemento de P definido por $p_x(x) = 1$; $p_x(y) = 0$ para $y \neq x$, permite el cálculo de $\phi(p, q)$ conociendo únicamente sus valores sobre las distribuciones igualitarias, o, lo que es lo mismo, conociendo simplemente el valor de una forma hemisimétrica

$$\psi : I \times I \rightarrow R$$

La posibilidad de incorporar a nuestro indicador ϕ determinados juicios de valor supone explicitar condiciones adicionales sobre $\geqslant$. Intentamos analizar ahora qué tipo de supuestos adicionales harán que nuestro indicador sea compatible con el principio de transferencias. Es interesante analizar, asimismo, si tal compatibilidad está vinculada a la dominancia estocástica, al igual que en el caso lineal, y sólo va a resultar factible cuando las formas hemisimétricas de base, ψ, sobre las distribuciones igualitarias son de un tipo específico.

Las definiciones de dominancia estocástica y de transferencias dadas en la sección II son independientes de cuáles sean las propiedades de la relación binaria sobre $P \times P$ que explicita el orden social, por lo que dichas ideas se trasladan ahora sin variación alguna.

Deseamos ahora obtener, para nuestro caso, resultados que extiendan los de los teoremas 1 y 2.

En la extensión del teorema 1 juegan un papel análogo al de las familias de funciones Vn, las familias de funciones siguientes:

$$\Omega_1 = \{\psi : I \times I \rightarrow R \mid \psi(x,y) = -\psi(y, x) \text{ y } \delta\psi/\delta x > 0\}$$

$$\Omega_2 = \{\psi \in \Omega_1 \mid \delta^2\psi/\delta x^2 < 0\}$$

$$\Omega n = \{\psi : I \times I \rightarrow R \mid \psi(x,y) = -\psi(y, x) \text{ y } \delta^k\psi/\delta x^k > 0 \text{ para } k \leqslant n, k \text{ impar}, \delta^k\psi/\delta x^k < 0 \text{ para } k \leqslant n, k \text{ par}\}$$

Es decir, Ω_1 son formas hemisimétricas crecientes en x (para cada y); Ω_2 son formas hemisimétricas crecientes y cóncavas en x (para cada y), etc.

El resultado siguiente es una extensión, al caso que nos ocupa, del teorema 1:

Teorema 4[2]. Sean $p, q \in P_\mu$. Entonces se verifica $p > n\, q$ si y sólo si

$$\boldsymbol{p(x)\psi(x, y)q(y) > 0 \text{ para toda } \psi \in \Omega n,\ n = 2, 3, \ldots}$$

Demostración. Basta tener en cuenta que

$$p(x)\psi(x,y)q(y) = [p(x) - q(x)]\psi(x,y)q(y) + q(x)\psi(x,y)q(y) =$$
$$= \Sigma\, [p(x) - q(x)]\psi(x,y)$$

Como $q(y) \geqslant 0$ para todo $y \in I$, se tiene que

$$p(x)\psi(x,y)q(y) > 0 \Rightarrow \Sigma\, [p(x) - q(x)]\psi(x,y) > 0 \text{ para todo } y \in I$$

Pero $\psi \in \Omega n$ si y sólo si $\psi_y : I \to R$, donde $\psi_y(x) = \psi(x,y)$ es tal que $\psi_y \in Vn$ para todo $y \in I$. Ahora bien, teniendo en cuenta el teorema 1, se sigue $\psi \in \Omega n$ si y sólo si $p >n\, q$. *C.Q.D.*

El paso siguiente consiste en extender el teorema 2, es decir, vincular la preferencia social (que ya ha sido asociada a la dominancia estocástica), con el principio de transferencias. Ello se consigue en el resultado siguiente:

Teorema 5. Para $p, q \in P_\mu$, las condiciones siguientes son equivalentes:

a) $\phi(p, q) > 0$ para $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, cuando $p = q + T^m(\alpha, x, \delta)$.

b) $\psi : I \times I \to R$ es tal que $\psi \in \Omega n$, y se verifica $p >n\, q \Rightarrow \phi(p, q) > 0$.

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que si $p >n\, q$ implica que $\psi \in \Omega n$, entonces $\psi_y \in Vn$.

Pero entonces, si $p = q + T^m(\alpha, x, \delta)$, el teorema 2 nos dice que $\Sigma\, p(x)\psi_y(x) > \Sigma\, q(x)\psi_y(x)$, de donde se sigue que:

$$[p(x) - q(x)]\psi(x,y)q(y) > 0,$$

y por un razonamiento análogo al del caso anterior,

$$p(x)\psi(x,y)q(y) > 0,$$

es decir, $\phi(p, q) > 0$. El otro sentido de la implicación es análogo. *C.Q.D.*[3].

[2] Este teorema, para $n = 1, 2$, y p, q en P aparece en Fishburn (1983).

[3] Si se considera una relación binaria sobre P de tal modo que sea representable por una funcional bilineal hemisimétrica ϕ, y la forma hemisimétrica de base $\psi : I \times I \to R$ es tal que $\psi \in \Omega n$, el teorema 4 vincula la dominancia estocástica de orden n, con la relación $\phi(p, q) > 0$, esto es, con la preferencia social de p sobre q, es decir:

Si $\psi \in \Omega n$, entonces $p > q$ si y sólo si $p > n\, q$. Con ello, hemos conseguido identificar las formas de base de las funcionales bilineales hemisimétricas cuya preferencia equivale a dominancia estocástica.

El resultado del teorema 5 indica que, cuando la relación binaria $\geqslant$ sobre P es tal que $\psi \in \Omega n$, obtenemos unas preferencias sociales compatibles con el principio de transferencias, de tal modo que la teoría SSB admite tal compatibilidad, con tal de que la forma hemisimétrica subyacente esté en Ωn (sin necesidad de disponer de un orden social). Es decir, que la compatibilidad con el principio de transferencias depende de cuál sea la especificación de la relación binaria sobre las distribuciones igualitarias, y de que esta especificación sea del tipo «aversa al riesgo», pero no tiene que ver con que la relación binaria $\geqslant$ sobre todas las distribuciones alternativas de renta sea una relación de orden. Es más, como ya hemos indicado en la sección anterior, pueden presentarse ciclos, y, sin embargo, las preferencias sociales ser tales que se dé su compatibilidad con el principio de transferencias.

El resultado del teorema 4 (y, en consecuencia, de modo análogo el del teorema 5) sólo son factibles cuando ψ es creciente en su primera componente [es decir, cuando se verifica, para las distribuciones igualitarias $\psi(x, y) > 0$ si $x > y$ —como elementos de R—). La extensión, en términos de utilidad esperada a otro tipo de soportes (no necesariamente reales) no es válida en general, a no ser que se dé una propiedad de este tipo, propiedad que, en nuestro caso, es fácilmente aceptable (véase Fishburn, 1984).

4.2. *El problema de la elección en la teoría SSB*

Como ya se ha comentado repetidas veces, el problema de la elección vinculado a una determinada relación binaria está asociado a la existencia de elementos maximales para dicha relación en determinados subconjuntos. En el caso de que la relación de preferencia social sobre las distribuciones de renta verifique los supuestos A.2, A.D y A.S, aparecen determinados problemas de decisoriedad que ya han sido puestos de manifiesto en las secciones anteriores. Así, el ejemplo 1 muestra una relación de este tipo en la que aparece un ciclo, con lo cual, considerando exclusivamente las distribuciones $\{p, q, r\}$, la relación de preferencia no decide entre ellas, ya que no existe elemento maximal en el conjunto $\{p, q, r\}$. No obstante, una relación binaria que verifique A.2, A.D y A.S posee elementos maximales en la envoltura convexa de cualquier conjunto finito, como veremos a continuación.

Consideremos tres distribuciones de renta, $p, q, r \in P$. Las tres tienen soporte finito, y podemos suponer que tal soporte es común (basta tomar, como en el ejemplo 1, sop $p \cup$ sop $q \cup$ sop $r = C$). Sea entonces sop p = sop q = sop r = C. Por supuesto, C es finito. Si ahora consideramos la envoltura convexa $\Gamma(\{p, q, r\})$, se verifica que, para todo $s \in \Gamma(\{p, q, r\})$, sop $s = C$.

El razonamiento anterior se puede repetir con cualquier subconjunto finito $Q \subset P$. Se obtiene entonces el siguiente resultado:

Teorema 6 (Fishburn, 1984). Sea $Q \subset P$, Q finito, y sea $\Gamma(Q)$ la envoltura convexa de Q. Entonces, existe un $p^* \in \Gamma(Q)$ tal que $p^* \geqslant q$, para todo $q \in \Gamma(Q)$.

Demostración. El que Q sea finito permite considerar un subconjunto finito C de I, como soporte común de todas las distribuciones en Q, $C = \{x_1, ..., x_n\}$. En estas condiciones, calcular $\phi(p, q)$, para cada p, $q \in Q$ se reduce a realizar el producto

$$[p(x_1), ..., p(x_n)]\ A\ [q(x_1), ..., q(x_n)]'$$

donde A es la matriz cuyos elementos $a_{ij} = \phi(x_i, x_j)$, $i, j = 1, ..., n$.

Supongamos ahora que en Q hay m elementos $\{q^1, ..., q^m\}$. Calculados $\phi(q^i, q^j)$, $i, j = 1, ..., m$, se puede construir otra matriz hemisimétrica, de orden m, de la forma $B = (b_{ij})$, donde $b_{ij} = \phi(q^i, q^j)$.

Ahora, el cálculo de $\phi(p, q)$, para p, $q \in \Gamma(Q)$ es sencillo:

$$p = \Sigma\, \lambda_i q^i \quad ; \quad q = \Sigma\, \mu_i q^i$$

con λ_i, $\mu_i \geqslant 0$ para todo $i = 1, ..., m$, $\Sigma\, \lambda_i = \Sigma\, \mu_i$, y se tiene

$$\phi(p, q) = (\lambda_1, ..., \lambda_m)\ B\ (\mu_1, ..., \mu_m)'$$

Si ahora interpretamos B como matriz de un juego, $\phi(p, q)$ es el resultado esperado asociado a las «estrategias mixtas» λ, μ, de ambos jugadores.

Por el teorema de Von Neumann, tenemos

$$\max_p \min_q \phi(p, q) = \min_q \max_p \phi(p, q) = \min_q \max_p [-\phi(p, q)] =$$
$$= -\max_q \min_p \phi(q, p) = -\max_q \min_p \phi(p, q)$$

Es decir, se sigue máx [mín $\phi(p, q)$] $= 0$, por lo que existe un $p^* \in \Gamma(Q)$ de tal modo que $\phi(p^*, q) \geqslant 0$ para todo $q \in \Gamma(Q)$. *Q.E.D.*[4].

El teorema anterior asegura la existencia de una distribución p^* preferida a cualquier otra en $\Gamma(Q)$. Es interesante observar algunas cuestiones a este respecto.

Si Q es un conjunto finito tal que todas las distribuciones de Q tienen la misma media, se tiene que todas las distribuciones en $\Gamma(Q)$ conservan la misma media. Entonces, podría ocurrir que, ante varias distribuciones alternativas de renta, todas ellas de igual media, no encontrásemos ninguna que resultara ser preferida a las demás. El teorema anterior asegura la existencia de una distribución, con la misma media, que es preferida a todas ellas.

[4] Este teorema puede mirarse como un corolario del teorema 7.2 en Border (1985) [confróntese Sonnenschein (1971)]. No obstante, posee la ventaja de proporcionar una prueba constructiva que permite calcular el elemento maximal.

Supongamos, por ejemplo, que, ante una distribución de hecho de la población, p, se plantean tres políticas redistributivas que conducen a sendas distribuciones q, r, s de tal modo que

$$q \geqslant p, r \geqslant p \text{ y } s \geqslant p, \text{ pero } q \geqslant r, r \geqslant s \text{ y } s \geqslant q.$$

Ante una situación de este tipo, obtener

$$p^* = \lambda p + \mu q + \rho r + \tau s, \text{ con } \lambda + \mu + \rho + \tau = 1,$$

y tal que $p^* \geqslant t$ para todo $t \in \Gamma(\{p, q, r, s\})$, tiene particular interés en el contexto que nos ocupa. Esto indica que existe una política redistributiva que conduce a una combinación de las distribuciones propuestas, que será preferida no sólo a la distribución inicial de la población, p, sino también a las diversas alternativas propuestas, y que por tanto sería aceptable por los partidarios de cada una de ellas. Además, la forma de prueba del teorema 6 proporciona un método de cálculo de tal distribución óptima.

Obsérvese que la teoría SSB siempre da respuesta ante la comparación de dos distribuciones. $\phi(p, q) = -\phi(q, p)$, por lo que, o bien $\phi(p, q) = 0$, con lo que p y q son indiferentes, o uno de los dos es positivo, con lo que, o bien $p > q$ ó $q > p$.

La unicidad de ϕ salvo transformaciones de semejanza significa que cualquier otra $\phi' = a\phi$, con $a > 0$ representa la misma relación. Esta condición no es menos general que la unicidad de w salvo transformaciones afines en el caso en que w sea un indicador de bienestar Von Neumann-Morgenstern. En efecto, al asociar $p > q$ con $\phi(p, q) > 0$, no podemos permitirnos «cambios de origen», y sí únicamente cambios de escala. La «preferencia (social) de p sobre q» medida por ϕ sigue siendo cardinal, en un sentido análogo al del caso clásico.

* * *

Sea ahora una distribución determinada $p \in P$. Asociada a p, definimos la siguiente relación:

Dadas $q, r \in P$, diremos $q \geqslant_P r$ si y sólo si $\phi(q, p) \geqslant \phi(r, p)$.

La definición anterior valora dos posibles distribuciones alternativas, q y r «vistas desde p»; y preferible q cuando el valor $\phi(q, p)$ es mayor que $\phi(r, p)$. Esto tiene sentido si recordamos que las comparaciones dadas por ϕ son cardinales. Así, al tomar la relación $\geqslant_P$, estamos comparando medidas de satisfactoriedad «sobre p», de las alternativas q y r.

El sentido de la valoración anterior supone considerar la distribución p como un *punto de partida* o *status-quo*, y elegir entre las diversas alternativas mediante su valoración desde tal *status-quo*.

La relación $\geqslant_P$ posee algunas propiedades interesantes, que se recogen en el siguiente teorema:

Teorema 7. ***a*) $\geqslant_P$ es un orden débil completo.**

***b*) $>_P$ verifica el axioma de linealidad A.3.**

Demostración. *a*) Se cumple trivialmente, pues $\phi(q, p) = \phi(q, p)$ para todo q; $\phi(q, p)$, $\phi(r, p)$ son comparables para todo par de distribuciones q, r; $\phi(q, p) \geqslant \phi(r, p)$ junto con $\phi(r, p) \geqslant \phi(s, p) \Rightarrow \phi(q, p) \geqslant \phi(s, p)$.

b) Si $q >_P r, s \in P$, se tiene $\phi(q, p) > \phi(r, p)$. Entonces, si $0 < \lambda < 1$, $\lambda q + (1 - \lambda)s > \lambda r + (1 - \lambda)s$, pues

$$\phi[\lambda q + (1 - \lambda)s, p] = \lambda\phi(q, p) + (1 - \lambda)\phi(s, p) >$$
$$> \lambda\phi(r, p) + (1 - \lambda)\phi(s, p) = \phi[\lambda r + (1 - \lambda)s, p]. \quad C.Q.D.$$

En definitiva, $\geqslant_P$ es un orden que verifica los axiomas A.1, A.2 y A.3, por lo que la elección en términos de $\geqslant_P$ es del tipo Von Neumann-Morgenstern. De hecho, la funcional w_P que representa el orden $\geqslant_P$ está dada por

$$w_P(q) = \phi(q, p)$$

es decir, la particularización de ϕ a q, cuando p se considera fijo.

Hay que tener en cuenta, no obstante, que, aunque el teorema 7 asegura la posibilidad de elección desde un punto de partida fijo, p, en base a la relación $\geqslant_P$, este tipo de elección puede resultar «miope», y una elección en estos términos puede llevar a ciclos, o a cambios en los que, creyendo mejorar, se llega a situaciones peores que las de partida.

Consideremos de nuevo las distribuciones del ejemplo 1:

$$p \equiv \{p(3) = 0{,}52, p(1) = 0{,}48\} \quad ; \quad q \equiv \{q(2) = 1\} \quad ; \quad r \equiv \{r(4) = 0{,}4, r(1) = 0{,}6\}$$

Se tiene que $\phi(p, q) > 0$; $\phi(q, r) > 0$; $\phi(r, p) > 0$.

Supongamos que se parte de la situación q, y se plantea pasar a la situación p, en la que la distribución es más desigual, pero, sin embargo, la renta per cápita es mayor $(\mu(p) = 2{,}04)$; posteriormente, ya en p, se plantea aumentar más aún la renta per cápita, a costa de más desigualdad. Como $\phi(r, p) > 0$, se pasará a r, pero, al ser $\phi(q, r) > 0$ hemos conseguido, en estos dos pasos, una situación peor que la de partida, q.

En este tipo de elecciones, pues, no cabe racionalmente la elección «desde un *status quo*», que va cambiando al ir alcanzando el objetivo propuesto. La solución, en estos términos, debe hacer uso del teorema 6, y entre las alternativas p, q, r, que constituyen un ciclo, determinar cuál es aquella $p^* \in \Gamma(\{p, q, r\})$ tal que $p^* \geqslant s$ para toda $s \in \Gamma(\{p, q, r\})$ (y, por tanto, $p^* \geqslant p, p^* \geqslant q, p^* \geqslant r$).

En el ejemplo indicado, $p^* = (0{,}034\,p + 0{,}99\,q + 0{,}4\,r)/1{,}424$, y, lógicamente, el objetivo del observador ético sería intentar llevar a la población a p^*.

5. Comentarios finales

La interpretación de la funcional w (en la sección 2) o de la ϕ (en la sección 4) como *indicadores de bienestar social* deja una puerta abierta al diseño de tales funcionales, ajustándolas al tipo de juicios de valor preferidos por los agentes involucrados en la comparación entre distribuciones alternativas de la renta.

No obstante, es importante señalar que existe una *diferencia de principio* entre el diseño de un indicador VNM o de un indicador SSB. En el primer caso, se supone que se puede *asignar un valor fijo del indicador* a cada estrato de renta (cuando éste se mira como la media de una distribución igualitaria); mientras que en el segundo caso lo relevante consiste en la *comparación entre cada dos estratos de renta,* asignando un valor determinado del indicador a cada par x, y de distribuciones igualitarias.

La idea de que el «incremento de bienestar asociado al paso de una distribución igualitaria a otra» venga medido por un valor $\phi(x, y)$ que no sea necesariamente descomponible en la forma $\phi(x, y) = w(x) - w(y)$ hace más general el planteamiento en términos de indicadorees SSB (resultando los VNM un caso particular, cuando tal descomposición es posible).

Es importante señalar que al comparar dos distribuciones p, q, mediante un indicador SSB, ϕ, lo relevante a la hora de decidir la preferencia es el *signo* de $\phi(p, q)$, no su valor absoluto. Puede decirse que cuando $\phi(p, q)$ es positivo, el indicador afirma la preferencia social de p sobre q, pero el hecho de que no esté garantizada la transitividad (y, ni siquiera la aciclicidad) implica que no se está realizando una agregación predeterminada de juicios de valor (o de preferencias individuales), sino que dichos juicios o preferencias se incorporan de modo específico para cada par de distribuciones igualitarias que se comparen.

Es, asimismo, interesante observar que la formulación SSB puede mirarse como más fácilmente interpretable desde el punto de vista Función de Bienestar Social, en el sentido de que admite fácilmente responder a un «orden social» obteniendo a partir de las preferencias de los individuos. En efecto, los coeficientes $\phi(x, y)$ que miden la «satisfacción social» del cambio de la distribución igualitaria con media y a la distribución igualitaria con media x pueden ser obtenidos directamente de los individuos [por un sistema de encuesta, por ejemplo. Véase, en este sentido, los tipos de encuestas y resultados presentados en Van Praag y Van Weeren (1986)].

Observemos que las formulaciones presentadas son compatibles con juicios de valor de cualquier índole. La construcción de la función $w: I \to R$ en el caso VNM, o de la función $\psi : I \times I \to R$ en el caso SSB admiten desde compatibilidad con el principio de transferencias hasta la incorporación de las preferencias de un observador externo que, al no tomar en consideración aspectos importantes para la sociedad, pudiera conducirla a resultados catastróficos.

Ejemplo 2. Supongamos que $w\colon I \to R$ está definida de tal manera que $w(1/n) = 1/\mathrm{L}\,n$, para $n \geqslant 2$, $w(1) = 1$, $w(0) = 0$, y consideremos la sucesión:

$$p^1 \equiv \{p^1(0) = 1/2;\ p^1(1) = 1/2\}$$

....

$$p^n \equiv \{p^n(0) = 1/(2n);\ p^n(1/n) = (n-1)/n;\ p^n(1) = 1/(2n)\}$$

....

Para esta sucesión se tiene $w(p^n) = (n-1)/(n\,\mathrm{L}\,n) + k/(2n)$, por lo que se verifica que $\{w(p^n)\}$ crece con n, es decir, con el indicador w se entiende que la sociedad mejora al pasar de p^n a p^{n+1}, y, al ser la relación de tipo VNM, es transitiva, por lo que la sucesión $\{p^n\}$ va mejorando el bienestar de la sociedad.

Sin embargo, $\mu(p^n) = (n-1)/(n^2) + 1/(2n)$, por lo que $\{\mu(p^n)\}$ converge a cero, esto es, la renta per cápita es cada vez más pequeña, llegando a ser tan pequeña como se quiera tomando n suficientemente grande. Es decir, con este tipo de indicador se podría llevar a la población a la inanición en aras (por ejemplo) de la igualdad.

Señalemos, por último, que en la base de toda la construcción presentada se encuentran dos puntos relevantes. En primer lugar, se supone la *capacidad de describir* la evolución del bienestar de sociedades igualitarias, en segundo lugar, se proporcionan las condiciones precisas para describir, a partir de estos datos, la evolución del bienestar de cualquier tipo de sociedades. Es importante señalar que, si bien los supuestos en que descansa la extensión son claros (supuestos A.1-A.3 en el caso de funcionales VNM; supuestos A.2, A.D y A.S en el caso SSB), ambos presuponen que es, *a priori*, posible evaluar el bienestar asociado a distribuciones igualitarias. Si esta evaluación es arbitraria, la arbitrariedad se extenderá a todas las restantes comparaciones.

Referencias

Allais, M. (1953): «Le comportement de l'homme rationnel devant de risque: critique des postulats et axiomes de l'ecole Americaine», *Econometrica, 21* (503-546).

Allais, M. (1952): «The foundations of a positive theory of choice involving risk and a criticism of the postulates and axioms of the american school», en Allais y Hagen (eds.) 1979 O.C. (27-45).

Allais, M., y Hagen, O. (eds.) (1979): *Expected utility Hypotheses and the Allais Paradox* Dordrecht, Reidel.

Atkinson, A. B. (1970): «On the Measurement of Inequality», J.E.T., 2 (244-263).

Battalio, R.; Hagel, J., y Mac Donald, D. (1985): «Animals Choices over Uncertain Outcomes», *Am. Ec. Review, 75* (597-613).

Bell, D. E. (1982): «Regret in decision making under uncertainty», *Operations Research, 30* (961-981).

Bell, D. E. (1983): «Disappointment in decision making under uncertainty», *Op. Res., 33* (1-27).

Blackorby, C., y Donaldson, D. (1978): «Measures of Relative Equality and their meaning in terms of Social Welfare», *J.E.T., 18* (59-80).

Blair, D. H., y Pollak, R. A. (1982): «Acyclic Collective Choice Rules», *Econometrica, 50* (931-943).

Border, K. C. (1985): *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge, C.U.P.
Chew, S. H. (1982): «A mixture set axiomatization of weighted utility theory», Discussion Paper 82-4 College of Business and Public Administration, Un. Arizona.
Chew, S. H. (1982): «A generalization of the quasilinear mean with applications to the measurement of income inequality and decision theory resolving the Allais paradox», *Econometrica, 51* (1065-1092).
Chew, S. A., y McCrimmon, K. (1979): «Alpha-nu choice theory: a generalization of expected utility theory», W-P 669 U. British Columbia, Faculty of Commerce and Business Administration.
Chipman, J. S. (1960: «The foundations of utility», *Econometrica, 28* (193-224).
Dalton, H. (1920): «The Measurement of the Inequality of Incomes», *Economic Journal, 30* (348-361).
Esteban, J. (1976): «Social Welfare Functions and Inequality Measures», W.P. 12.76, Economía, Un. Autónoma Barcelona.
Fishburn, P. C. (1968): «Utility Theory», *Management Science, 14* (335-378).
Fishburn, P. C. (1979): «On the nature of expected utility theory», en Allais y Hadgen (eds.), O.C. (243-257).
Fishburn, P. C. (1980): «Subjective expected utility: a review of normative theories», *Theory and Decisión, 13* (139-199).
Fishburn, P. C. (1982): *The foundations of expected utility*, Dordrecht, Reidel.
Fishburn, P. C. (1983): «Transitive measurable utility», *J.E.T., 31* (293-317).
Fishburn, P. C. (1984): «Dominance in SSB utility theory», *J.E.T., 34* (130-148).
Fishburn, P. C., y Willig, R. D. (1984): «Transfer Principles in Income Distribution», *J. Pu. Ec., 25* (323-328).
Gretcher, D. (1978): «Recent Psychological Studies of behavior under Uncertainty», *Am. Ec. Rev., 68* (70-74).
Gretcher, D., y Plott, C. R. (1979): «Economic Theory of Choice and the Preference Reversal Phenomenon», *Am. Ec. Rev., 69* (623-638).
Herstein, I., y Milnor, J. (1953): «An Axiomatic Approach to Measurable Utility», *Econometrica, 21*, págs. 291-297.
Holt, C. A. (1986): «Preference Reversals and the Independence Axiom», *Am. Ec. Rev., 76* (508-515).
Kahnemann, D., y Tversky, A. (1979): «Prospect theory: an analysis of decision under risk», *Econometrica, 47* (263-291).
Kolm, S. C. (1976a): «Unequal Inequalities I», *J.E.T., 12* (416-442).
Kolm, S. C. (1976b): «Unequal Inequalities II», *J.E.T., 13* (82-111).
Lichtenstein, S., y Slovic, P. (1971): «Reversal of Preferences between bids and Choices in Gambling Decisions», *J. of Exp. Psychology, 89* (46-55).
Loomes, G., y Südgen, R. (1982): «Regret theory: and alternative theory of rational choice under uncertainty», *Economic Journal, 92* (805-824).
MacCrimmon, K., y Larsson, S. (1979): «Utility theory: axioms versus paradoxes», en Allais y Hadgen (eds.) O.C. (333-409).
Machina, M. (1982): «Expected utility analysis without the independence axiom», *Econometrica, 50* (277-323).
Richter, M. K. (1971): «Rational Choice», en Chipman, J. S.; Hurwicz, L.; Richter, M. K., y Sonneschein, H. F. (eds.): *Preferences, utility and Demand*, Nueva York, Harcourt.
Sen, A. (1970): *Collective Choice and Social Welfare*, San Francisco, Holden Day.
Sen, A. (1973): *On Economic Inequality*, Oxford, Oxford, U. Press.
Sonneschein, H. (1971): «Demand Theory without transitive preferences, with Applications to the Theory of Competitive Equilibrium», en Chipman y otros (eds.): *Preferences, Utility and Demand*, Nueva York, Harcourt.
Theil, H. (1968): *Economics and Information Theory*, Chicago, Rand McNally.
Van Praag, B. M. S. (1971): «The Welfare Function of Income in Belgium: an empirical Investigation», *European Ec. Review, 2* (337-369).
Van Praag, B. M. S., y Kapteyn, A. (1973): «Further evidence on the individual

Welfare Function of Income: an empirical investigation in the Netherlands», *European Ec. Review, 4* (33-62).
Van Praag, B. M. S.; Hagenaars, A. J., y Van Weeren, J. (1982): «Poverty in Europe», *Rev. of Income and Wealth, 28* (345-359).
Van Praag, B. M. S. (1985): «Households Cost Functions and Equivalence Scales. An Alternative Approach», Report 84.04 Center for Research in Public Economics, Leyden University.
Van Praag, B. M. S. (1985): «Linking Economics with Psychology; an Economists View», *J. of Ec. Psychology*, en prensa.
Van Praag, B. M. S., y Van Werren, J. (1986): «The impact of past experiences and anticipated future on individual judgements», Erasmus Un. Roterdam. Paper presentado al European Meeting Econometric Soc. Budapest.
Von Neumann, J., y Morgenstern, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton U. Press.

Abstract

The main feature of this paper is to introduce a new way of evaluating alternative income distributions by a suitable interpretation of some theories on decision under risk. The social evaluation of alternative income distributions can be formally analyzed in a way similar to the problem of choice between risky prospects. Nevertheless, a direct interpretation of Von Neumann-Morgenstern theory imposes severe restrictions on the admissible evaluation functions. A number of alternatives to the expected utility theory have brought forward the relevance of pair-wise comparisons. The translation of these alternative theories into the context of income comparison turns out a fruitful approach, specially by using Fishburn's SSB theory (1982, 1984), as we do in this paper.

Recepción de original, enero de 1987.
Versión final, julio de 1987.