INVESTIGACIONES ECONÓMICAS. vol. XXVI (2), 2002, 299-321

DESIGUALDAD INTERMEDIA PARETIANA

CORAL DEL RÍO
Universidade de Vigo

Del Río y Ruiz-Castillo (2000) propusieron un nuevo concepto de desigualdad intermedia entre las nociones absoluta y relativa, y desarrollaron procedimientos empíricos que permiten extraer conclusiones de Bienestar à la Shorrocks (1983) El objetivo de este trabajo es utilizar esta metodología para definir un nuevo concepto, la ($\mathbf{x}$, ., p)*-desigualdad, que permite cardinalizar algunas de las situaciones en las que se verifica un aumento en la desigualdad relativa, donde el concepto anterior no es operativo. El mérito de este enfoque radica en que no juzga a priori la noción de desigualdad políticamente correcta. En este sentido, son los datos los que determinan el tipo de desigualdad para el cual dos distribuciones son equivalentes.*

Palabras clave: Desigualdad intermedia, bienestar social, distribución de la renta.

(*JEL* D31, D63)

1. Introducción

Supongamos que tenemos una población de individuos homogéneos, cuyos niveles de vida están adecuadamente representados por una variable unidimensional que llamamos *renta*. Tradicionalmente, en Economía del Bienestar estamos interesados en métodos de evaluación que tengan preferencia por la eficiencia, entendida como mayor renta, y preferencia por la equidad, entendida como menor desigualdad vertical. Más aun, queremos que nuestros métodos incorporen un mínimo de juicios de valor. Así, existe acuerdo en que las Funciones de Bienestar Social admisibles (FBS de aquí en adelante) deben satisfacer,

Estoy en deuda con Javier Ruiz-Castillo y con Olga Alonso Villar por su ayuda en la realización de este trabajo. También agradezco los comentarios realizados por los asistentes al II Encuentro de Economía Aplicada, así como las sugerencias de un evaluador anónimo y del codirector de la revista que han permitido mejorar sensiblemente la versión final. En cualquier caso, la autora es la única responsable de sus deficiencias.

además de los axiomas de continuidad e invarianza ante réplicas poblacionales, un axioma de preferencia por la equidad. Sobre esta base, Shorrocks (1983) sugiere dos amplias clases de FBS según el supuesto extra de monotonicidad que verifiquen: por un lado, están aquéllas que muestran preferencia por mayores rentas siempre que se mantenga constante la noción relativa de desigualdad, esto es, siempre que la proporción de renta de cada individuo respecto del total permanezca inalterada; y por otro lado, aquéllas que se decantan por una más exigente noción absoluta, de acuerdo a la cual la desigualdad sólo se mantiene constante si cada hogar experimenta el mismo cambio de renta absoluta[1].

Sin embargo, Kolm (1976a, 1976b) observó que muchas personas poseen nociones de desigualdad al margen de los dos casos polares antes mencionados, de forma que para ellas incrementos proporcionales en todas las rentas provocan incrementos en la desigualdad, mientras que incrementos en la misma magnitud absoluta la reducen. De forma consistente con su terminología tildó tales actitudes de centristas, al situarse en el espacio intermedio delimitado por las nociones absoluta y relativa antes mencionadas[2]. En la literatura existen diferentes propuestas para caracterizar este espacio centrista o intermedio entre los dos extremos habituales (relativo y absoluto). Conocemos la del propio Kolm (1976b), la de Bossert y Pfingsten (1990), la de Pfingsten y Seidl (1997) y la de Del Río y Ruiz-Castillo (2000) (DRRC (2000) de aquí en adelante).

En este último trabajo se propone un nuevo concepto de desigualdad intermedia, denominado $(\mathbf{x}, 9)$-desigualdad, para el cual se ofrecen procedimientos operativos que han permitido, por primera vez, aplicar un

[1] Denotemos por w_r y w_a a estas dos clases de funciones, respectivamente. El merito de la contribución de Shorrocks es que desarrolla métodos operacionales, basados en las usuales curvas de Lorenz, para descubrir si una distribución es sin ambigüedad mejor que otra de acuerdo a todas las FBS peternecientes a w_r o w_a. Moyes (1987) desarrolla ciertos análogos, basados en curvas de Lorenz absolutas, para establecer si una distribución es mejor que otra, sin ambigüedad, de acuerdo a todas las FBS pertenecientes a w_a.

[2] Informes recientes procedentes de encuestas han confirmado que, efectivamente, la gente no es en modo alguno unánime en la elección entre un concepto relativo, absoluto o intermedio de desigualdad. Véase, por ejemplo, Amiel y Cowell (1992), Harrison y Seidl (1994), Seidl y Theilen (1994) y, para el caso español, Ballano y Ruiz-Castillo (1993).

concepto de desigualdad intermedia a un caso empírico concreto[3]. El mérito de este enfoque radica en que no juzga *a priori* la noción de desigualdad políticamente correcta, sino que son los datos los que determinan el tipo de desigualdad para el cual dos distribuciones son equivalentes. Si una de ellas presenta, además, una mayor media podemos concluir que ésta no es inferior, con respecto a la otra, para la clase de medidas de bienestar que incorporan precisamente ese tipo de desigualdad. A renglón seguido, cada lector puede juzgar si los resultados obtenidos deben interpretarse como una mejora en el bienestar o no, en función de su propia noción de desigualdad[4].

Dadas las buenas propiedades de la $(\mathbf{x}, 9)$-desigualdad parece razonable profundizar en este enfoque a la hora de diseñar medidas de desigualdad que permitan ordenar distribuciones de renta situadas fuera del espacio centrista clásico. Así, nos preguntamos si al margen del mundo intermedio delimitado por los criterios absoluto y relativo, es posible caracterizar otros espacios distributivos en relación con juicios de valor más extremos, considerados igualmente de interés. En concreto, sería interesante contar con medidas que reflejen nociones de desigualdad situadas más *a la derecha* en el espectro político que la noción relativa (caracterizadas todas ellas por valorar como una mejora en términos de equidad incrementos proporcionales en las rentas individuales). Y hacer lo mismo con aquéllas otras situadas todavía más *a la izquierda* que la noción absoluta (para las cuales un reparto igualitario entre todos los individuos del incremento de renta experimentado por la sociedad empeora la desigualdad, exigiendo mejoras absolutas superiores entre los más pobres para poder hablar de mejoras en desigualdad).

El objetivo del presente trabajo es utilizar la metodología desarrollada en DRRC (2000) para explorar sus posibilidades en la definición de

[3]Utilizando dicha metodología, en Del Río y Ruiz-Castillo (2001) se analiza la evolución del bienestar económico en España entre 1980-81 y 1990-91 a partir de las distribuciones de gasto extraídas de las dos últimas Encuestas de Presupuestos Familiares (EPF) elaboradas por el INE.

[4]De acuerdo con los resultados obtenidos para la década de los ochenta en Del Río y Ruiz-Castillo (2001), para personas de opiniones más moderadas caracterizadas por nociones de desigualdad cercanas a la relativa (esto es para valores de 9 j [0.87, 1]) hemos mejorado sin ambigüedad. Por el contrario, para personas más escoradas a la *izquierda* en el espectro político (con valores de 9 j [0, 0.71], de forma que la desigualdad sólo disminuye si una proporción mayor del 29 por ciento de los incrementos de renta se reparte en términos *per capita* iguales) hemos empeorado en desigualdad.

ambas nociones de desigualdad. Así, para el primer caso se define un nuevo concepto, denominado ($\mathbf{x}$, ., ±)-desigualdad, que permite cardinalizar algunas de las situaciones en las que se constata un aumento en la desigualdad relativa. Además, se ofrece un resultado teórico que permite hacer operativa esta noción a la hora de comparar distribuciones de renta en términos de bienestar, mediante procedimientos empíricos *à la* Shorrocks (1983) que minimizan el conjunto de juicios de valor utilizados en el análisis. Para el segundo de los casos se muestran las buenas propiedades que mantiene la ($\mathbf{x}$, 9)-desigualdad a la hora de caracterizar distribuciones que presentan menores niveles de desigualdad absoluta que una original, lo que hace innecesario proponer nuevas medidas al no ser más que transformaciones obvias de la anterior.

El resto del trabajo se organiza como sigue. La sección 2 presenta el concepto de ($\mathbf{x}$, 9)-desigualdad y plantea la necesidad de nuevas nociones *intermedias* de desigualdad. La sección 3 desarrolla el concepto de ($\mathbf{x}$, ., ±)-desigualdad y los resultados teóricos que permiten obtener ordenaciones parciales en términos de bienestar. En la sección 4 se ofrece la implementación empírica en el caso homogéneo. Por último, en la sección 5 se presentan las conclusiones. Un breve Apéndice con las demostraciones cierra el trabajo.

2. Nociones intermedias de desigualdad

2.1. *Desigualdad intermedia y (*$\mathbf{x}$*, 9)-desigualdad*

Denotemos por $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1[ZZZ[\mathbf{x}^{\mathrm{h}})$ R $\mathrm{r}^{\mathrm{h}}_{++}$[2 4 h \ Q[una distribución de renta para una población de H individuos con idénticas características, convenientemente ordenada de modo que $\mathbf{x}^1$ 4 $\mathbf{x}^2$ 4 ZZZ 4 $\mathbf{x}^{\mathrm{h}}$Z Definimos $D := R^{\mathrm{h}}_{++}$ como el conjunto de todas las distribuciones $\mathbf{x}$ posibles. Sea S el simplex H-dimensional y, para cualquier $\mathbf{x}$ R d[sea $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} = (\mathbf{v}^1_{\mathbf{x}}[ZZZ[\mathbf{v}^{\mathrm{h}}_{\mathbf{x}})$ R S el vector de proporciones individuales de renta, $\mathrm{v}^{©}_{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{h}}}{\mathbf{X}}$[donde x $= \sum_{©=1}^{\mathrm{h}} \mathbf{x}^{©}$ es la renta agregada. Denotemos por $\mathbf{1}$ al vector en el que todos sus componentes son iguales a la unidad, y por e al vector $(1/H)\mathbf{1}$R sZ Para dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ R d[denotemos por $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ L $\mathbf{v}_{\mathrm{y}}$ a la denominación débil de $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ sobre $\mathbf{v}_{\mathrm{y}}$ (o lo que es lo mismo, de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$) según el criterio de Lorenz[5].

[5] El criterio de dominancia débil de Lorenz afirma que dadas dos distribuciones, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, la distribución $\mathbf{x}$ domina en el sentido de Lorenz a la distribución $\mathbf{y}$ siempre que la curva de Lorenz asociada a la distribución $\mathbf{x}$ no se sitúe por debajo de la curva de Lorenz de $\mathbf{y}$ en ninguno de los puntos donde han sido estimadas. Este resultado

Decimos que una función, W, es S-cóncava en D si para cualquier distribución de rentas, $\mathbf{x}$ R d y para cualquier matriz bioestocástica de orden H, $\mathbf{M}$, se verifica que W($\mathbf{Mx}$)$\geqslant$ w ($\mathbf{x}$)[siendo bioestocástica toda matriz cuadrada en la que todos sus elementos son no-negativos y cada una de sus filas y columnas suman la unidad. Cualquier función real I definida sobre D que satisfaga continuidad, S-convexidad y el principio de invarianza ante réplicas poblacionales se denomina una medida de desigualdad de la renta. Decimos que I($\cdot$) es invariante en escala cuando I($\mathbf{x}$) = I(5$\mathbf{x}$) para todo $\mathbf{x}$R D y para todo 5 ^ 0. Asimismo, decimos que I($\cdot$) es invariante ante traslaciones cuando I($\mathbf{x}$) = I($\mathbf{x}$+1$\mathbf{1}$) para todo $\mathbf{x}$ R d y para todo 1 R R tal que ($\mathbf{x}$+1$\mathbf{1}$)R D. Si una medida de desigualdad es invariante en escala o ante traslaciones se dice que es una medida de desigualdad relativa o absoluta, respectivamente.

Asimismo, Pfingsten y Seidl (1997) (PS de aquí en adelante) definen el espacio centrista asociado a una distribución $\mathbf{x}$R D como el conjunto de distribuciones de renta, $E(\mathbf{x})$, que verifica tres propiedades: primero, toda distribución $\mathbf{y}$R $E(\mathbf{x})$ se percibe igualmente distribuida que $\mathbf{x}$; segundo, para 5$\mathbf{x}$ ^ $\mathbf{x}$ y ($\mathbf{x}$+1$\mathbf{1}$) ^ $\mathbf{x}$ toda distribución $\mathbf{y}$R $E(\mathbf{x})$ se percibe más equitativamente distribuida que 5$\mathbf{x}$ y menos equitativamente distribuida que ($\mathbf{x}$+1$\mathbf{1}$); y tercero, para 5$\mathbf{x}$ \ $\mathbf{x}$ y ($\mathbf{x}$+1$\mathbf{1}$) \ $\mathbf{x}$ toda distribución $\mathbf{y}$R $E(\mathbf{x})$ se percibe menos igualitariamente distribuida que 5$\mathbf{x}$ y más igualitariamente distribuida que ($\mathbf{x}$+1$\mathbf{1}$). Dada una actitud de desigualdad centrista de este tipo, la cuestión es saber si existen medidas de desigualdad de la renta E-invariantes. Como PS apuntan, una manera sencilla de modelizar el espacio intermedio es suponer que $E(\mathbf{x})$ está constituido por rayos que pasan por $\mathbf{x}$[6]. Así, definen al conjunto de rayos + de la siguiente forma:

$$\mathrm{e}_{+}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \text{ R d } : \mathbf{y} = \mathbf{x} + < + [< \text{ R r} \}$$

donde + R S es tal que $\mathbf{e}$ L + L $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$. Asimismo, definen los índices de desigualdad +-invariantes, I_{+}, como aquellas funciones que, además de las tres propiedades básicas que caracterizan a toda medida de

garantiza que la distribución $\mathbf{x}$ presenta menores (o al menos no mayores) niveles de desigualdad que y para cualquier índice de desigualdad relativo. Además, el conocido teorema de Atkinson (1970) establece que si ambas distribuciones tienen la misma media, entonces la dominancia de Lorenz es equivalente a las preferencias representadas por toda FBS que sea continua, creciente y estrictamente cóncava (con aversión a la desigualdad).

[6] Aunque ésta no es la única alternativa, tal y como se desprende de Krtscha (1994).

desigualdad, verifican que $\mathrm{I}_{+}(\mathbf{x}) = \mathrm{I}_{+}(\mathbf{y})$ para todo $\mathbf{y}$R $E_{+}(\mathbf{x})$ y todo $\mathbf{x}$ para el que + L $\mathbf{v_x}$.

La ($\mathbf{x}$, 9)-desigualdad concentra su atención sólo en aquellas medidas de desigualdad + -invariantes que poseen una clara interpretación económica. De esta forma, dada una distribución de referencia, $\mathbf{x}_0$ R D, y un valor de 9 R [0,1], sólo considera rayos que pasan por $\mathbf{x}$ R D construidos de tal forma que el 9 por ciento de la renta extra se asigne entre los individuos según las proporciones existentes en $\mathbf{x}_0$, y el (1 - 9) por ciento restante se distribuya a partes iguales entre todos ellos. Así, en DRRC (2000) se definen los rayos *intermedios*, $\mathrm{P}_{(\mathbf{x}_0[9)}$ $(\mathbf{x})$, como:

$$\mathrm{p}_{(\mathbf{x}_0[9)}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \text{ R d } : \mathbf{y} = \mathbf{x} + {<} (9\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0} + (1 \quad 9)\mathbf{e})[{<} \text{ R r }\} \wr$$

Resulta obvio que si $9 = 0$, $\mathrm{p}_{(\mathbf{x}_0[9)}(\mathbf{x})$ representa a todas las distribuciones que comparten con $\mathbf{x}$, la misma desigualdad absoluta, mientras que si $9 = 1$ y $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ (esto es, la distribución de referencia coincide con la inicial) nos ceñimos a distribuciones con su misma desigualdad relativa. De esta forma, el parámetro 9 nos permite cuantificar lo "cerca" o "lejos" que la desigualdad de la distribución y se encuentra de la noción relativa o absoluta asociada a $\mathbf{x}$[7].

Decimos que una función, $\mathrm{i}_{(\mathbf{x}_0[9)}(\cdot) : D \quad \text{A r}$, es una medida de desigualdad ($\mathbf{x}_{0[}$9)-invariante si y sólo si es continua, S-convexa, satisface el axioma de réplicas poblacionales y verifica que:

$$\mathrm{i}_{(\mathbf{x}_0[9)}(\mathbf{x}) = \mathrm{i}_{(\mathbf{x}_0[9)}(\mathbf{y})[$$

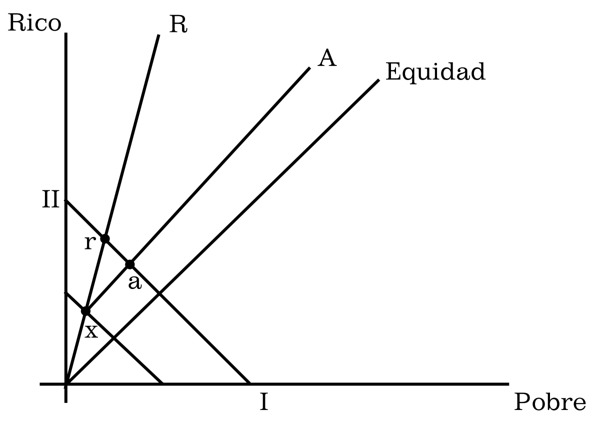
para todo $\mathbf{y}$ R $\mathrm{p}_{(\mathbf{x}_0[9)}(\mathbf{x})$[y para toda distribución $\mathbf{x}$ para la que los juicios de valor representados por ($\mathbf{x}_{0[}$9) constituyen una *actitud centrista*, en el sentido propuesto en DRRC (2000).

[7]Es fácil comprobar que el precio que hay que pagar para ofrecer esta interpretación económica es poder abarcar sólo un subconjunto del espacio intermedio total asociado a cualquier distribución inicial. Así, y salvo en el caso bidimensional en el que la +-desigualdad coincide con la ($\mathbf{x}$, 9)-desigualdad, en la mayoría de las situaciones empíricas concretas ésta sólo permite obtener resultados aproximados que no logran identificar a cada distribución final con un único valor de 9, sino con un intervalo, a partir de los procedimientos empíricos desarrollados en DRRC (2000).

2.2. La necesidad de nuevas nociones intermedias de desigualdad

Para ilustrar la utilidad de definir nuevas nociones de desigualdad al margen de las ya existentes sirvámonos del ejemplo representado en el Gráfico 1. En ésta se muestra el conjunto de distribuciones de renta factibles entre dos individuos: uno "pobre" y otro "rico", en términos de la distribución original **x**. La recta R representa a las distribuciones que poseen la misma desigualdad relativa que **x** (ya que todas ellas asignan al mismo individuo la misma proporción de renta respecto del total), mientras que la recta A (paralela a la recta de 45 grados) engloba a aquellas distribuciones que comparten con **x** la misma desigualdad absoluta. A su vez, la recta **I-II** representa un conjunto de distribuciones que tienen la misma renta total y que, como es obvio, se caracterizan por incorporar mayores cotas de desigualdad en su reparto a medida que nos movemos de la recta de equidad perfecta al punto **II**. Así, partiendo de **x** y del valor de < necesario para alcanzar la recta **I-II**, valores de 9 próximos a 0 y 1 nos acercan a las distribuciones **a** y **r**, respectivamente. En este caso bidimensional, el espacio intermedio asociado a la distribución **x** está representado por el área situada entre las rectas R y A, siendo el segmento **r-a** un subconjunto caracterizado por representar posibles repartos alternativos del incremento de renta experimentado por esa economía al pasar de **x** a la renta asociada a la recta **I-II**.

GRÁFICO 1
Desigualdad absoluta, relativa e intermedia



A la hora de evaluar distribuciones de renta situadas al margen del espacio delimitado por las nociones absoluta y relativa las estrategias que se nos presentan son varias. La más inmediata es ampliar el campo de acción de la (**x**, 9)-desigualdad permitiendo que el parámetro 9 pueda tomar valores fuera del intervalo [0,1]. Como se muestra en el Gráfico 1, y para el valor del parámetro t correspondiente, considerar valores de 9 ^ 1 significa movernos a lo largo del tramo **r-II**, situándonos en distribuciones que presentan una mayor desigualdad relativa que **r** y que la distribución inicial **x**. Por el contrario, tomar valores de 9 \ 0 significa alcanzar distribuciones con menor desigualdad absoluta que **x** y cada vez más próximas a la distribución paritaria.

De esta forma, el objetivo central que nos propusimos al inicio de este trabajo se habría alcanzado: el espacio de distribuciones de renta habría sido cardinalizado en términos de desigualdad de manera que, para una distribución final cualquiera, cuanto mayor sea el valor del parámetro, 9, que la une con una distribución inicial, **x**, menos exigentes deberán ser nuestros juicios de valor si queremos hablar de paridad en el nivel de desigualdad presente en ambas distribuciones. Y por lo tanto, mayor será el espectro *ideológico* para el cual la situación final presenta unas mayores cotas de desigualdad en el reparto de la renta. La interpretación del parámetro 9 es aquí igual que en el caso intermedio clásico. Su principal atractivo descansa en el hecho de que además de mostrarnos la distancia de la distribución final a las distribuciones **r** y **a**, nos ofrece una interpretación de cómo se ha asignado entre los individuos el crecimiento experimentado. Esto permite *reconstruir* la distribución final a partir de la inicial y de las nociones absoluta y relativa en el reparto de la renta extra: un (9 ·100) por ciento del incremento en la renta total se debería a un crecimiento proporcional en la renta de todos los individuos, y el ((1 - 9) ·100) por ciento restante sería fruto de un reparto equitativo entre todos ellos[8].

Aunque la utilización de valores de 9 fuera del intervalo [0,1] permite ordenar un amplio conjunto de distribuciones, parece interesante proponer nociones de desigualdad enmarcadas en juicios de valor distintos

[8] Así, un 9 = 1.4 debería interpretarse como un incremento proporcional en las rentas individuales de un 140 por ciento del incremento en la renta total, asociado a un impuesto de suma fija de un 40 por ciento que compensa el exceso anterior y que origina el incremento en la desigualdad relativa. Otro tanto ocurriría con distribuciones ligadas a valores de 9 negativos. En estos casos un impuesto proporcional sería el paso previo a un reparto equitativo, de mayor magnitud, lo que necesariamente conduce a distribuciones más igualitarias en términos absolutos.

del absoluto y el relativo. Así, nuestro interés se centra en presentar nuevos conceptos de *desigualdad intermedia*, asociados unos a criterios más laxos que el relativo, y ligados otros, a nociones todavía más exigentes que la absoluta a la hora de enjuiciar en términos de equidad diferentes asignaciones del incremento producido en la renta total.

En este trabajo no vamos a proponer una nueva noción de desigualdad asociada a este último espacio, ya que para estas situaciones consideramos útil seguir utilizando la $(\mathbf{x}, 9)$-desigualdad permitiendo que el parámetro 9 tome valores negativos. La razón descansa en una característica que hace de éste un espacio *intermedio* peculiar. El límite *natural* que permite superar la noción absoluta y enmarcar el espacio de distribuciones de renta situadas gráficamente a la derecha de la recta A, no es otro que el concepto de desigualdad asociado al reparto igualitario de todas y cada una de las unidades de renta existentes en la sociedad. Como es fácil de verificar, sea cual sea la dimensión de la distribución inicial siempre existe un valor negativo de 9 que nos permite alcanzar la distribución igualitaria de igual media que la distribución final. Por lo que, definir una nueva parametrización de las distribuciones intermedias entre la noción absoluta y la que representa la equidad perfecta supone una cardinalización que no es más que una mera transformación de la proporcionada por la $(\mathbf{x}, 9)$-desigualdad. De esta forma, una vez estimado el valor de 9 (\ 0), es inmediato calcular la *distancia* existente entre la distribución final y la igualitaria.

Detengámonos ahora en el primero de los casos: esto es, cuando trabajamos con distribuciones que presentan una mayor desigualdad relativa que $\mathbf{x}$ (aquellas situadas visualmente a la izquierda del rayo R)[9]. En situaciones de este tipo y con las herramientas actuales sólo podemos asegurar que 9 es mayor que 1, pero no podemos ordenar las distribuciones en términos de un concepto de desigualdad más extremo que el relativo. Esto es posible si nos decidimos a considerar alguna clase de juicios de valor *paretianos* como situación límite en la que encuadrar estas distribuciones, lo que significa que el espacio total de distribuciones que presentan mayor desigualdad relativa que la original habría sido dividido en dos partes. En el caso bidimensional esto resulta sencillo de entender. Por un lado, la zona compuesta por las distribuciones

[9] Además de su interés teórico, este caso presenta una mayor relevancia empírica dada la tendencia experimentada por los niveles de desigualdad en varios países de la OCDE durante la década de los ochenta. Véase, por ejemplo, Atkinson *et al.* (1995) y Gottschalk y Smeeding (1997).

situadas a la izquierda del único rayo Paretiano existente, que no es más que la recta que pasando por **x** es paralela al eje de ordenadas. Este espacio está constituido por todas aquellas distribuciones en las que la situación del individuo "pobre" no sólo se ha deteriorado en términos relativos sino también en términos absolutos: parte de la renta que poseía en un principio va a parar al individuo "rico" que además acapara toda la diferencia en la renta total que separa las distribuciones inicial y final. A pesar de su interés, posponemos para futuros trabajos la definición de medidas de desigualdad intermedias que nos permitan cardinalizar las distribuciones pertenecientes a este espacio.

Nuestro interés se centra ahora en la segunda de estas zonas: la constituida por todas aquellas distribuciones situadas entre el rayo Relativo y el Paretiano. La recta Paretiana define el conjunto de distribuciones de renta asociadas a una inicial, con la que comparten el mismo nivel de *regresividad* según el siguiente criterio de desigualdad extremo: mientras el más "pobre" mantenga constante su nivel de renta, incrementos en la renta del más "rico" no alteran el nivel de desigualdad existente en la economía. Tomando dicha recta (que llamaremos P) y la recta R como fronteras de este nuevo *espacio*, estamos en condiciones de proponer una nueva noción de desigualdad intermedia entre ambos criterios que nos permita ordenar el conjunto de distribuciones pertenecientes al mismo.

3. Desigualdad intermedia paretiana

3.1. Una propuesta de desigualdad intermedia paretiana: la ($\mathbf{x}$, ., $\pm$)-desigualdad

Sea I una función real definida sobre D que satisface continuidad, S-convexidad y el principio de invarianza ante réplicas poblacionales. Decimos que I($\cdot$) es una medida de *desigualdad paretiana* si $\mathrm{I}(\mathbf{x}) = \mathrm{I}(\mathbf{x}^{\pm})$, para todo $\mathbf{x}$ R D y para todo $\mathbf{x}^{\pm} = (\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2,..., \mathrm{x}^{\pm}, 5^{\mathrm{t}}\mathrm{x}^{\pm+1},...., 5^{\mathrm{t}}\mathrm{x}^{\mathrm{h}})$ donde $5^{\mathrm{t}} \wedge 0$, y p indica el número de individuos situados en la cola de la distribución cuya renta no se ha visto alterada al pasar de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}^{\pm}$. Debido a lo extremo de los juicios de valor presentes en I($\cdot$), a esta *medida de desigualdad paretiana* también la denominaremos *medida del grado de regresividad-progresividad paretiana*[10].

[10] La razón de utilizar ese nombre es la siguiente. Si $5^{\mathrm{t}} \wedge 1$ la distribución $\mathbf{x}^{\pm}$ refleja un mayor nivel de renta para la población acomodada mientras que la población pobre no experimenta variación alguna. Un programa de gasto público que tuviese estos efectos sería calificado por muchas personas de claramente regresivo. Obsérve-

Sea $U(\mathbf{x})$ un conjunto de distribuciones de renta tal que, en primer lugar, todo $\mathbf{y}$ R $U(\mathbf{x})$ se percibe con idéntico nivel de desigualdad que $\mathbf{x}$ (o si se prefiere, con el mismo grado de *regresividad-progresividad* que $\mathbf{x}$); en segundo lugar, para $5\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}$ y $\mathbf{x}^{\pm} \wedge \mathbf{x}$, todo $\mathbf{y}$ R $U(\mathbf{x})$ se percibe más equitativamente distribuido que $\mathbf{x}^{\pm}$ y peor distribuido que $5\mathbf{x}$; y en tercer lugar, para $\mathbf{x} \wedge 5\mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}^{\pm}$ se piensa que cualquier $\mathbf{y}$ R $U(\mathbf{x})$ está peor distribuido que $\mathbf{x}^{\pm}$ y mejor distribuido que $5\mathbf{x}$. Dadas las citadas percepciones, lo que proponemos es la búsqueda de alguna medida de desigualdad U-invariante, esto es, una medida para la cual $\mathrm{I}(\mathbf{x}) = \mathrm{I}(\mathbf{y})$ para todo $\mathbf{y}$ R $U(\mathbf{x})$. Igual que en el caso de la +-desigualdad, supondremos que $U(\mathbf{x})$ está constituido por rayos que pasan por $\mathbf{x}$. Así, definimos $\{U_{,}\ (\mathbf{x})\}$ como el conjunto de rayos-, que pasan por $\mathbf{x}$ de forma que:

$$U_{,}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}\ \mathrm{R}\ D : \mathbf{y} = \mathbf{x}+<\,,\,[<\mathrm{R}\ \mathrm{r}\}\mathrm{Z}$$

De acuerdo con las ideas centristas, exigiremos que los vectores , R S cumplan con las siguientes condiciones: primero, deben ser dominados en el sentido de Lorenz por la distribución original $\mathbf{x}$: $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ L , ; y segundo, deben dominar en el sentido de Lorenz al vector $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm}$: , L $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm}$, donde p es el número de hogares cuya renta dejaremos inalterada y $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm}$ R S es,

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} = \overset{\mathrm{P}}{\mathrm{b}}\, 0^{1}[\,\mathrm{ZZZ}[\,0^{\pm}[\,\frac{\mathbf{x}^{\pm+1}}{\sum_{©=\pm+1}^{\mathrm{h}} \mathbf{x}^{©}}[\,\mathrm{ZZZ}[\,\frac{\mathbf{x}^{\mathrm{h}}}{\sum_{©=\pm+1}^{\mathrm{h}} \mathbf{x}^{©}}\, \overset{\mathrm{Q}}{\mathrm{a}}\ \mathrm{Z}$$

De esta forma, dada una distribución $\mathbf{x}$ R D, definimos $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ como el conjunto de juicios de valor[11] que se caracterizan por una pérdida en términos de desigualdad relativa y una mejora en desigualdad en relación a las distribuciones paretianas asociadas a $\mathbf{x}$,

$$\mathrm{b}\,(\mathbf{x}) = \{\,,\ \mathrm{R}\ \mathrm{s}\ : \mathbf{v}_{\mathbf{x}}\,\mathrm{l}\ ,\ \mathrm{l}\,\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm}\}\mathrm{Z}$$

Para comprender en qué sentido $\mathbf{x}$ y , co-determinan el dominio de las funciones invariantes en rayos-, , definimos el conjunto !(,) de

se, sin embargo, que si $0 \setminus 5^{t} \setminus 1$ la nueva distribución $\mathbf{x}^{\pm}$ podría asociarse con alguna noción de progresividad si la comparamos con la distribución inicial, $\mathbf{x}$ (al menos mientras las reducciones en el nivel de renta de los "ricos" sean lo suficientemente pequeñas como para no originar trasvases de población de un colectivo al otro).

[11] Expresados en forma de proporciones de renta.

distribuciones de renta para las cuales , R S representa una actitud *centrista* entre los criterios relativo y paretiano:

$$! (,) = \{\mathbf{x} \text{ R } \mathrm{d} : \mathbf{v}_{\mathbf{x}} \, \mathrm{l} \, , \, \mathrm{l} \, \mathbf{v}^{\pm}_{\mathbf{x}}\}\text{Z}$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}$ R D y , R S pero , R B($\mathbf{x}$) o $\mathbf{x}$ R ! (,) no estamos ante una noción de *regresividad-progresividad* intermedia. De acuerdo con todo esto, decimos que una función I$_{,}$: D A R, es , -invariante en ! (,) si y sólo si para todo $\mathbf{x}$ R ! (,),

$$\mathrm{i}_{,}(\mathbf{x}) = \mathrm{i}_{,}(\mathbf{y}) \quad \pm¢³¢ \, µ°¥° \quad \mathbf{y} \text{ R } \mathrm{u}_{,}(\mathbf{x})$$

Dada una función , -invariante, i$_{,}$ ($\cdot$), decimos que es una medida de *regresividad-progresividad invariante* en rayos , si, además, es continua, S-convexa y satisface el principio de invarianza ante réplicas poblacionales.

Nosotros, al igual que hicimos en DRRC (2000), concentramos nuestra atención en aquellas medidas *intermedias* que tienen una clara interpretación económica. Así, dada una distribución inicial, $\mathbf{x}_0$ R D, una *línea de pobreza* implícita, 0 ^ p \ H, y un valor de . R [0,1], sólo consideramos rayos que pasan por $\mathbf{x}$ R D construidos de tal forma que el . por ciento de la renta extra se asigne entre los individuos "ricos" según el criterio paretiano elegido, y el (1-.) restante se distribuya según las proporciones existentes en $\mathbf{x}_0$. Esto es, definimos

$$\mathrm{p}_{(\mathbf{x}_0[.[\pm)}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \text{ R } D : \mathbf{y} = \mathbf{x} + \text{<} (. \mathbf{v}^{\pm}_{\mathbf{x}_0} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0})[\text{<R}R\}$$

Ciertamente, siendo $,_0 = .\mathbf{v}^{\pm}_{\mathbf{x}_0} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0}[$ se verifica que

$$\mathrm{p}_{(\mathbf{x}_0[.[\pm)}(\mathbf{x}) = \mathrm{u}_{,_0}(\mathbf{x})\text{Z}$$

Consiguientemente, nos restringimos a un subconjunto dentro de la totalidad de las distribuciones *intermedias* posibles. Si denotamos por $!'(,_0)$: $! (,_0)$, al conjunto de distribuciones de renta para las cuales $,_0$ representa una combinación lineal convexa entre su noción relativa y paretiana:

$$!'(,_0) = \{\mathbf{x} \text{ R } D : .'\mathbf{v}^{\pm}_{\mathbf{x}} + (1 \quad .')\mathbf{v}_{\mathbf{x}} = \, ,_0 \quad \pm¢³¢ \, ¢¨¶^{-} \quad .' \text{ R } [0[1]\}[$$

decimos que una función, $\mathrm{i}_{(\mathbf{x}_0[.[\pm)}(\cdot) : D$ A r , es una medida de desigualdad ($\mathbf{x}_0$, ., p) en $!'(,_0)$ si y sólo si

$$\mathrm{i}_{(\mathbf{x}_0[.[\pm)}(\mathbf{x}) = \mathrm{i}_{(\mathbf{x}_0[.[\pm)}(\mathbf{y})[\quad \pm¢³¢ \, µ°¥° \quad \mathbf{y} \text{ R } \mathrm{p}_{(\mathbf{x}_0[.[\pm)}(\mathbf{x})\text{Z}$$

En general, el conjunto $!'(\,,_0)$ es claramente no-vacío, de forma que las medidas de $(\mathbf{x}_0[\,.\,[\,\pm)$-desigualdad están bien definidas. Cuando $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_0$ coinciden, si $. = 0$, la $(\mathbf{x}_0[\,.\,[\,\pm)$-desigualdad se convierte en la noción de desigualdad relativa, con $5 = 1 + </X$; mientras que si $. = 1$ nos restringimos al caso paretiano, con $5^{\mathrm{t}} = 1 + </ \sum_{©=\pm+1}^{\mathrm{h}} \mathbf{x}^{©}$.

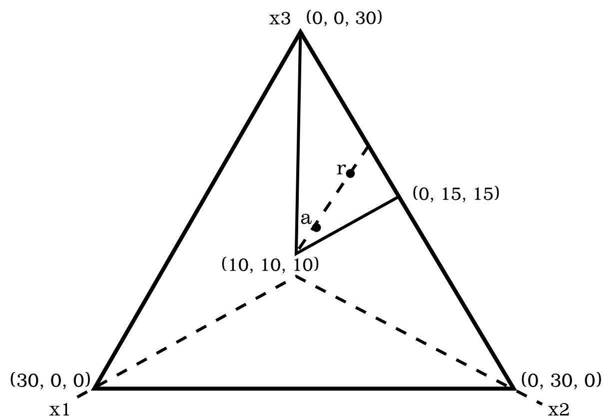
De esta forma, cambios en la renta en la escala < se distribuyen entre los individuos de acuerdo con alguna combinación lineal entre $\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0}^{\pm}$ y $\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0}$ en el simplex S, según el valor de $.$. La interpretación del parámetro es sencilla. Un $. = 0.3$ significa que sea cual sea la variación en la renta total debe distribuirse de la forma siguiente: un 30 por ciento exclusivamente entre los $(H\ \text{-}p)$ individuos de mayor renta en la población, siendo realizado el reparto de forma proporcional a su renta relativa dentro de este subgrupo en la distribución de referencia $(\mathbf{x}_0)$; y el 70 por ciento restante debe asignarse según las proporciones de renta individuales de la distribución $\mathbf{x}_0$. De esta forma, a medida que aumentamos el valor de $.$, nos situamos en distribuciones en las que el incremento de renta producido en la sociedad repercute cada vez en menor medida en los estratos más pobres de la población; hasta llegar a la distribución paretiana, en la que se encuentran definitivamente fuera del reparto[12].

Es evidente que la utilización de un concepto paretiano, con el objeto de delimitar el espacio *intermedio* situado a la *derecha* en el espectro político de la noción relativa, encierra la toma de varias decisiones. En primer lugar debemos determinar qué individuos van a constituir cada uno de los dos grupos en los que hemos dividido a la población. Se trata de delimitar, al igual que en los índices de pobreza al uso, cuál va a ser el umbral de pobreza implícito. No estando en condiciones de juzgar a priori la bondad de las diferentes elecciones de este parámetro, parece aconsejable probar con distintos valores de p y estudiar la robustez de los resultados, sobre todo teniendo en cuenta que el espacio intermedio mismo depende crucialmente de esta elección. En segundo lugar, nuestra definición de *desigualdad paretiana* ha incorporado una forma de reparto proporcional entre los individuos "ricos" que no es la única posible. Para comprender mejor las alternativas existentes fijémonos en el Gráfico 2. En este ejemplo se muestra a tres individuos, cuyas

[12] Debe señalarse la dependencia que estas medidas *intermedias* tienen respecto de la situación de partida elegida. Para profundizar en esta cuestión véase Del Río (2000).

rentas están representadas en los ejes: $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ y $\mathbf{x}^3$. La distribución inicial es la $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, y la final se sitúa en algún punto del plano presupuestario determinado por un total de 30 unidades de renta a repartir entre ellos[13]. Dado el principio de anonimidad que impregna todo nuestro análisis, sólo estamos interesados en aquellas distribuciones que no representen reordenación alguna entre los individuos. En nuestro caso sólo nos referiremos, pues, al espacio delimitado por las distribuciones: (10, 10, 10), (0, 15, 15) y (0, 0, 30).

GRÁFICO 2
Ejemplo en tres dimensiones

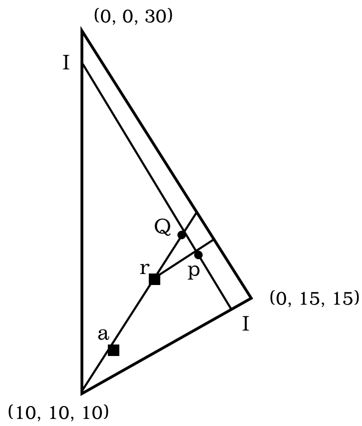


En el Gráfico 3 nos centramos ya en estas distribuciones y señalamos con las letras $\mathbf{a} = (9, 10, 11)$, y $\mathbf{r} = (5, 10, 15)$, aquellas distribuciones que comparten la misma desigualdad (absoluta y relativa, respectivamente) que la distribución $\mathbf{x}$. Como ya sabemos, la recta que une $\mathbf{r}$ y $\mathbf{a}$ representa el conjunto de distribuciones alcanzables con el parámetro 9 R [0,1], en la ($\mathbf{x}$, 9)-desigualdad. Supongamos que $p = 1$ (esto es, sólo consideramos fuera del reparto paretiano al individuo de menor renta inicial). Entonces, la recta **I-I** representa todas las distribuciones candidatas a ser equivalentes en desigualdad paretiana a la inicial $\mathbf{x}$. En ella, todos sus puntos se caracterizan por darle el mismo valor a su primera componente ($\mathbf{x}^1 = 1$), reflejando diferentes formas de reparto de las 24 unidades de renta extra entre los otros dos individuos. Cualquiera de estos puntos podría ser elegido como $\mathbf{x}^{\pm}$, según quisiésemos poner mayor o menor énfasis en la desigualdad existente en el reparto

[13] En el Gráfico 2 no se refleja la distribución inicial $\mathbf{x}$, mostrándose sólo el plano presupuestario en el que se situaría la hipotética distribución final.

de esta renta extra. Nuestra elección de $\mathbf{x}^{\pm}$ se indica en el Gráfico 3 con la letra $\mathbf{P} = (1,\ 11.6,\ 17.4)$.

GRÁFICO 3
Distribución Paretiana y su relación con la recta **a-r**. Ejemplos en tres dimensiones.



Como se puede observar, **P** no coincide con la distribución **Q** (que representa la intersección de la recta **I-I** con la **r-a**). La recta **r-a** es interesante porque incorpora una asignación del total entre los tres individuos progresivamente más desigual a medida que nos acercamos al punto **Q**. Con la particularidad de que, y esto es lo importante, sigue el mismo patrón que nos permitió pasar del reparto igualitario (**a**) al proporcional (**r**). Desgraciadamente, sin embargo, el punto **Q** no tiene por qué existir cuando trabajamos con distribuciones de mayor dimensión. De forma que, probablemente, no podamos seguir esta senda si queremos utilizar el concepto paretiano y mantener constante la renta de determinados individuos a su nivel inicial. Siendo esto así, la elección de **P** y $\mathbf{v}^{\pm}_{\mathbf{x}}$ de como referencia a la hora de comparar distribuciones se presenta como la más adecuada[14].

3.2. Ordenaciones parciales en términos de bienestar

Una Función de Bienestar Social es una función real, W, definida sobre D, que proporciona para cada distribución de renta $\mathbf{x}$ el bienestar *so-*

[14] Desde luego existen otras posibles alternativas que también pueden resultar interesantes. Por ejemplo, el reparto a partes iguales de todas las cantidades extra entre los "ricos" (en lugar del reparto proporcional que incorpora el punto **P**); o, por supuesto, todas las variantes intermedias entre estas dos alternativas.

cial, o simplemente agregado, desde un punto de vista normativo. En la sección previa hemos introducido un nuevo concepto, la *desigualdad intermedia paretiana*. Es ahora el momento de incorporar esta cualidad junto con la preferencia por la eficiencia, y considerar FBS que verifiquen ambas propiedades. En nuestro contexto, la extensión natural a las sugerencias hechas por Shorrocks (1983) para los casos absoluto y relativo, sería interesarnos por FBS tales que, dado $\mathbf{x}_0$ R D, . R [0,1] y 0 \ p \ H, verifiquen la siguiente condición

$$\mathrm{w}\,(\mathbf{x}\ + <(.\,\mathbf{v}^{\pm}_{\mathbf{x}_0} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0})) \geqslant \mathrm{w}\,(\mathbf{x})[$$

para cualquier distribución $\mathbf{x}$ R ! '(, $_0$), y para cualquier escalar < $\geqslant$ 0. Lo que refleja una preferencia por rentas más elevadas manteniendo constante la ($\mathbf{x}_0$[.[p)-desigualdad. Denotemos por $\mathrm{W}_{(\mathbf{x}_0[\,.\,[\pm)}$ a la clase de FBS que satisfacen continuidad, invarianza ante réplicas poblacionales, S-concavidad y monotonicidad a lo largo de los rayos ($\mathbf{x}_0$[.[p).

Una línea de investigación posible a raíz de lo anterior sería construir y caracterizar índices completos de desigualdad *intermedia* que se deriven de estas FBS, lo que proporcionaría fundamentos teóricos para la utilización de nuestro concepto de desigualdad, sustentándolo tanto en aspectos axiomáticos como éticos. Sin embargo, nuestro objetivo se centra en la ordenación de perfiles de renta sin ceñirnos a una familia de índices concreta, lo que inevitablemente aumentaría los juicios de valor implícitos en el ejercicio. Para ello, utilizamos los cuasi-órdenes desarrollados por Chakravarty (1988) en términos de curvas de Lorenz, donde se supone que tenemos preferencia por mayores rentas siempre que no provoquen una mayor desigualdad *intermedia* paretiana. El siguiente teorema resume la conexión entre dominancia de Lorenz y FBS pertenecientes a $\mathrm{W}_{(\mathbf{x}_0[\,.\,[\pm)}$:

TEOREMA: Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ R D. Entonces las afirmaciones (1.i , 1.ii) y (2) son equivalentes:

(1.i) $\mathrm{m}(\mathbf{y}) \geqslant \mathrm{m}(\mathbf{x})$, donde $\mathrm{m}(\cdot)$ es la función media, y

(1.ii) $\mathbf{y}$ L $\mathbf{x}^{\mathrm{t}}(.^{\#})$, para algún $.^{\#}$ R [0,1], siendo
$$\mathbf{x}^{\mathrm{t}}(.^{\#}) = \mathbf{x} + (Y - X)(.^{\#}\mathbf{v}^{\pm}_{\mathbf{x}} + (1 \quad .^{\#})\mathbf{v}_{\mathbf{x}})\wr$$

(2) $\mathrm{W}(\mathbf{y}) \geqslant \mathrm{W}(\mathbf{x})$, para todo W R$\mathrm{W}_{(\mathbf{x}[\,.^{\#}[\pm)}$.

COROLARIO: Bajo las condiciones del Teorema anterior,

$$\mathrm{W}(\mathbf{y}) \wedge \mathrm{W}(\mathbf{x}), \text{ para todo W RW}_{(\mathbf{x}_0[\,.\,[\pm)}, \text{ con } . \ \mathrm{R}(.^{\#}[1].$$

El teorema afirma que la dominancia según Lorenz de un vector de rentas ($\mathbf{y}$), sobre la correspondiente transformación de otro ($\mathbf{x}^{\mathrm{t}}$) es suficiente para garantizar que ambos ($\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$) pueden ser ordenados sin ambigüedad y de forma unánime por cualquier FBS S-cóncava y creciente ante incrementos en renta que no alteren la *desigualdad intermedia paretiana*.

4. Implementación empírica

La transformación de la distribución $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}^{\mathrm{t}}(.^{\#})$, según la expresión del teorema anterior, permite que las disribuciones $\mathbf{x}^{\mathrm{t}}$ e $\mathbf{y}$ tengan la misma media, $\mathrm{m}(\mathbf{x}^{\mathrm{t}}) = \mathrm{m}(\mathbf{y})$ y que, por tanto, en poblaciones de idéntico tamaño se sitúen en el mismo espacio presupuestario. Gráficamente (véase el Gráfico 3) los distintos valores de . nos permiten movernos a lo largo de la recta **r-P**. Como es obvio, esto significa que para H $\wedge$ 2 sólo podemos alcanzar un pequeño subconjunto de las distribuciones de renta que capturan una actitud *intermedia* paretiana respecto a una distribución inicial. Así, dadas dos distribuciones cualesquiera, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$, tales que $\mathbf{w}$ tenga una menor desigualdad paretiana pero mayor desigualdad relativa que $\mathbf{u}$, nada nos garantiza que exista un . tal que,

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + (W \quad U)(.\,\mathbf{v}_{\P}^{\pm} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\P})[$$

siendo W y U las rentas agregadas de las distribuciones $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}$. Lo que sí podemos asegurar es que siempre existen dos valores de ., $._1^{\mathrm{t}}$ y $._2^{\mathrm{t}}$ (en el intervalo [0,1] en el caso general) que nos permiten caracterizar la totalidad del espacio intermedio a partir de la siguiente partición en el conjunto $\{\mathbf{r},\ \mathbf{P}\}$:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{r}[\ \mathbf{z}_1^{\mathrm{t}}\} &= \{\mathbf{z}\ \mathrm{R}\ D : \mathbf{z} = \mathbf{u} + (W \quad U)(.\,\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{u}})[.\,\mathrm{R}\ [0[.\,_1^{\mathrm{t}}]\};\\
\{\mathbf{z}_1^{\mathrm{t}}[\mathbf{z}_2^{\mathrm{t}}\} &= \{\mathbf{z}\ \mathrm{R}\ D : \mathbf{z} = \mathbf{u} + (W \quad U)(.\,\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{u}})[.\,\mathrm{R}\ (.\,_1^{\mathrm{t}}[.\,_2^{\mathrm{t}})\};\\
\{\mathbf{z}_2^{\mathrm{t}}[\mathbf{P}\} &= \{\mathbf{z}\ \mathrm{R}\ D : \mathbf{z} = \mathbf{u} + (W \quad U)(.\,\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{u}})[.\,\mathrm{R}\ [.\,_1^{\mathrm{t}}[1]\}\wr
\end{aligned}$$

Por construcción, en cada uno de estos subconjuntos se verifica que $\mathrm{I}_{(\mathbf{u}[.[p)}(\mathbf{z}) = \mathrm{I}_{(\mathbf{u}[.[p)}(\mathbf{u})$ para el conjunto de .'s asociado. Así por ejemplo, para todo $\mathbf{z}$ R $\{\mathbf{r}[\ \mathbf{z}_1^{\mathrm{t}}\}$, $\mathrm{I}_{(\mathbf{u}[.[p)}(\mathbf{z}) = \mathrm{I}_{(\mathbf{u}[.[p)}(\mathbf{u})$, con . R $[0,\ ._1^{\mathrm{t}}]$. Es fácil comprobar que, para cada uno de estos subconjuntos, la relación entre la distribución **w** y las distribuciones **z** es la siguiente:

$$\begin{array}{l}
\mathbf{z} \ \mathrm{l} \ \mathbf{w} \quad \pm¢^3¢ \ \mu°¥° \quad \mathbf{z} \quad \mathrm{R} \quad \{\mathbf{r}[\ \mathbf{z}_1^{\mathrm{t}}\}; \\
\mathbf{w} \ \mathrm{l} \ \mathbf{z} \quad \pm¢^3¢ \ \mu°¥° \quad \mathbf{z} \quad \mathrm{R} \quad \{\mathbf{z}_2^{\mathrm{t}}[\ \mathbf{P}\}; \ °
\end{array}$$

$$\mathbf{z} \quad ¦´ ¯° ¤°®\pm¢^3¢£\text{-}¦ ¤°¯ \ \mathbf{w} \ \pm¢^3¢ \ \mu°¥° \ \mathbf{z} \ \mathrm{R}\{\mathbf{z}_1^{\mathrm{t}}[\ \mathbf{z}_2^{\mathrm{t}}\ \}$$

Por todo lo cual, se ha de cumplir que

$$\begin{array}{lcll}
\mathrm{i}_{(\mathbf{u}[.[p)}(\mathbf{w}) & = & \mathrm{i}_{(\mathbf{u}[.[p)}(\mathbf{u}) \quad \pm¢^3¢ \ \mu°¥° & .\ \mathrm{R}\ [0[\ .{}_1^{\mathrm{t}}][\\
\mathrm{i}_{(\mathbf{u}[.[p)}(\mathbf{w}) & = & \mathrm{i}_{(\mathbf{u}[.[p)}(\mathbf{u}) \quad \pm¢^3¢ \ \mu°¥° & .\ \mathrm{R}\ [.{}_2^{\mathrm{t}}[\ 1][
\end{array}$$

y que, **w** y **u** son no comparables desde el punto de vista de la (**u**, ., ±)-desigualdad para todo . R(.1$^{\mathrm{t}}$, .2$^{\mathrm{t}}$). De esta forma, la estrategia que deberíamos seguir si queremos comparar dos distribuciones en términos de bienestar podría resumirse en los cuatro pasos siguientes:

1) Estimar la curva de Lorenz de la distribución que tenga una mayor renta media, **w**.

2) Transformar la distribución de menor renta media, **u**, según las expresiones indicadas anteriormente, **z**(.), eligiendo para ello un conjunto de valores de . que recorran el intervalo [0,1].

3) Estimar para cada una de estas distribuciones artificiales, su curva de Lorenz y los test estadísticos correspondientes, para poder determinar su relación de dominancia o no-comparabilidad con la obtenida para la distribución **w**[15].

4) Computar el mayor valor de . para el cual se cumpla que **z** L **w**, ($.{}_1^{\mathrm{t}}$), y el menor a partir del cual **w** L **z**, ($.{}_2^{\mathrm{t}}$).

De esta forma estaríamos en condiciones de determinar para qué juicios de valor, [$.{}_2^{\mathrm{t}}$[1], el crecimiento de la renta experimentado por la sociedad permite afirmar que se ha producido un incremento en el bienestar social, y para qué juicios de valor, [0[$.{}_1^{\mathrm{t}}$], la mejora en media va acompañada de incrementos en los niveles de desigualdad que ensombrecen la valoración que podamos llevar a cabo del crecimiento experimentado por esa economía. La mayor o menor amplitud de ambos intervalos no

[15] Para ello podrían utilizarse, por ejemplo, los procedimientos de inferencia estadística desarrollados por Bishop *et al* (1994), a partir de los resultados de Beach y Davidson (1983).

ofrece, así, una aproximación a la mayor o menor amplitud del espectro ideológico asociado a cada uno de estos diagnósticos[16].

5. Conclusiones

Los métodos empíricos existentes en la actualidad permiten contrastar si una distribución de rentas y proporciona un mayor bienestar social que otra distribución **x** de acuerdo con todos los miembros de amplias clases de FBS. Dichas clases difieren en la forma en la que la preferencia por mayores rentas se hace compatible con la invarianza de la desigualdad relativa, absoluta o intermedia entre ambas. Supongamos que, a partir de esta metodología, conocemos que la distribución **y** tiene mayor renta y más desigualdad relativa que la distribución **x**. Así las cosas, los métodos existentes hasta el momento no nos permiten valorar si ese incremento en la desigualdad relativa es "grande.º "pequeño.ª menos que nos decantemos por la utilización de índices completos asociados a juicios de valor más restrictivos.

En este trabajo se propone un nuevo concepto de desigualdad, la (**x**, ., ±)-desigualdad, asociado a un criterio más laxo que el relativo, siendo **x** la distribución de referencia en las comparaciones, . un parámetro que puede tomar valores en el intervalo unidad y p la población considerada "pobre". Para ello hemos considerado juicios de valor paretianos que nos han permitido definir el límite en el que encuadrar a un subconjunto de distribuciones de renta con una mayor desigualdad relativa. En la práctica decimos que **x** e **y** tienen la misma (**x**, ., ±)-desigualdad si la diferencia entre la suma de sus rentas es asignada entre los individuos como sigue: un . por ciento entre los individuos ricos"según sus proporciones de renta iniciales, dejando inalterada la renta de los individuos "pobres"; y un (1 - .) por ciento a repartir entre todos ellos preservando las proporciones iniciales reflejadas en **x**. De esta forma se completa el mapa dibujado en la (**x**, 9)-desigualdad ya que mientras en ésta el interés se centraba en definir el espacio intermedio situado políticamente a la *izquierda* de la noción relativa, con la (**x**, ., ±)-desigualdad nos interesamos por el espacio *intermedio* que engloba a aquellas nociones de equidad situadas ligeramente a su *de-*

[16] La extensión de esta metodología al caso heterogéneo, en el que los hogares no sólo se diferencian en su nivel de renta sino también en sus características, puede verse en Del Río (2000). Una aplicación empírica a diversas particiones de interés para la población de hogares en España, durante la década de los ochenta, puede encontrarse en Del Río (1996).

recha. Futuros desarrollos de estos procedimientos pueden ayudarnos a caracterizar nuevos espacios *intermedios* que permitan cuantificar los niveles de *regresividad-progresividad* de distribuciones que reflejen repartos de renta aun más extremos que el paretiano.

Apéndice A.1

A1.1 Demostración del Teorema

1) =I 2): Como m($\mathbf{y}$) $\geqslant$ m($\mathbf{x}$), para cualquier FBS, W R $W_{(\mathbf{x}[.\#[\pm)}$ tenemos que:

$$\mathrm{w}\,(\mathbf{x}^{\mathrm{t}}) = \mathrm{w}\,(\mathbf{x} + (\mathrm{y} \quad \mathrm{x}\,)(.\,^{\#}\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .\,^{\#})\mathbf{v}_{\mathbf{x}}) \geqslant \mathrm{w}\,(\mathbf{x})\text{ʅ} \qquad [\mathrm{A}1.1]$$

Más aún, como $\mathbf{y}$ domina según el criterio de Lorenz a $\mathbf{x}^{\mathrm{t}}$ y ambas tienen la misma media, m($\mathbf{y}$), sabemos que

$$\mathrm{w}\,(\mathbf{y}) \geqslant \mathrm{w}\,(\mathbf{x}^{\,\mathrm{t}})[\qquad [\mathrm{A}1.2]$$

para cualquier función S-cóncava, W (ver Dasgupta *et al.*, 1973). Combinando [A1.1] y [A1.2], concluimos que

$$\mathrm{w}\,(\mathbf{y}) \geqslant \mathrm{w}\,(\mathbf{x})[\quad \pm¢^{3}¢\ \mu°¥° \quad \mathrm{w}\ \mathrm{R}\ \mathrm{w}_{\,(\mathbf{x}[.\#[\pm)}$$

2) =I 1): Sea $\mathbf{u}$ D y $\mathbf{z} = \mathbf{u}$ + (Y-U)[$.\,^{\#}\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .\,^{\#})\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$]. Supongamos que

$$\mathrm{w}\,(\mathbf{u}) = (®(\mathbf{u}))^{-}\ \S\ [\mathbf{z}][\qquad [\mathrm{A}1.3]$$

donde n $\geqslant$ 0, y f $(\cdot)$ es una función continua y S-cóncava que satisface la propiedad de invarianza ante réplicas poblacionales. Se puede comprobar que cualquier función W que verifique [A1.3] es monótona a través de los rayos ($\mathbf{x}$[$.^{\#}$[$\pm$) de forma que:

$$\mathrm{w}\,(\mathbf{u})\ 4\ \mathrm{w}\,(\mathbf{u} +\!<'\,(.\,^{\#}\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .\,^{\#})\mathbf{v}_{\mathbf{x}})) = \left(®(\mathbf{u}) + \frac{<'}{\mathrm{h}}\right)^{-}\ \S\ [\mathbf{z}][$$

para cualquier <' $\geqslant$ 0. Nótese que las propiedades de continuidad, invarianza ante réplicas poblacionales y S-concavidad de f implican que W satisface las mismas propiedades. Así, la expresión [A1.3] asegura que la función W($\cdot$) satisface los supuestos del Teorema. Ya que W($\mathbf{x}$) 4 W($\mathbf{y}$), eligiendo $f(\cdot)$ = 1 obtenemos la condición (1.i):

$$\mathrm{w}\,(\mathbf{x}) = (®(\mathbf{x}))^{-}\ 4\ (®(\mathbf{y}))^{-} = \mathrm{w}\,(\mathbf{y})\text{ʅ}$$

Por otro lado, si n = 0 obtenemos:

$$\mathrm{w}\,(\mathbf{x}) = \S\ [\mathbf{z}] = \S\ [\mathbf{x}^{\mathrm{t}}]\ 4\ \S\ [\mathbf{y}] = \mathrm{w}\,(\mathbf{y})\text{Z}$$

Como $\mathrm{m}(\mathbf{x}^{\mathrm{t}}) = \mathrm{m}(\mathbf{y})\ \wedge\ 0$, y $f(\cdot)$ es cualquier función S-cóncava, concluimos que $\mathbf{y}$ L $\mathbf{x}^{\mathrm{t}}$ (véase Dasgupta *et al.*,1973).

Q.E.D.

A1.2 Demostración del Corolario

Sea . R $(.^{\#}, 1]$, tal que $.^{\#} = . \text{ - B}$, para algún B ^ 0. Entonces podemos escribir:

$$.^{\#}\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .^{\#})\mathbf{v}_{\mathbf{x}} = .\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \quad \text{B}(\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} \quad \mathbf{v}_{\mathbf{x}})\text{Z}$$

Se puede comprobar que $.^{\#}\ \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .^{\#})\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ se puede obtener a partir de $.\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ mediante una secuencia de transferencias de renta del rico al pobre (manteniendo la ordenación inicial). Así, $.^{\#}\ \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .^{\#})\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ domina estrictamente a $.\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ según el criterio de Lorenz. De forma que si

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \text{<}[.\,\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\pm} + (1 \quad .)\mathbf{v}_{\mathbf{x}}][\quad \text{<} = \mathrm{y} \quad \mathrm{x}\,[$$

podemos concluir que $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{t}}$ domina estrictamente a $\mathbf{v}_{\mathbf{x}'}$ según el criterio de Lorenz. Por lo que, bajo los supuestos del Teorema, la expresión

$$\mathrm{w}\,(\mathbf{x}) = \mathrm{w}\,(\mathbf{x}')\ \setminus\ \mathrm{w}\,(\mathbf{x}^{\mathrm{t}}) \leqslant \mathrm{w}\,(\mathbf{y})$$

se debe cumplir para cualquier función W R $\mathrm{w}_{(\mathbf{x}[.[\pm)}$, con . R $(.^{\#}, 1]$.

Q.E.D.

Referencias

Amiel, Y. y F. A. Cowell (1992): “Measurement of income inequality. Experimental test by questionnaire”, *Journal of Political Economy* 47, pp. 3-26.

Atkinson, A. B. (1970): “On the measurement of inequality”, *Journal of Economic Theory* 2, pp. 244-263.

Atkinson, A. B., L. Rainwater y T. Smeeding (1995), *Income Distribution in OECD Countries: the evidence from the Luxembourg Income Study (LIS),* OECD, París.

Beach, C. M. y R. Davidson (1983): “Measurement of income inequality. experimental test by questionnaire”, *Journal of Political Economy* 47, pp. 3-26.

Bishop, J. A., S. Chakraborti y P. D. Thistle (1994): “Relative inequality, Absolute Inequality, and Welfare: Large Sample Tests for Partial Orders”, *Bulletin of Economic Research* 46, pp. 41-59.

Ballano, C. y J. Ruiz-Castillo (1993): “Searching by questionnaire for the meaning of income inequality”, *Revista Española de Economía* 10, pp. 233-259.

Bossert, W. y A. Pfingsten (1990): “Intermediate inequality: concepts, indices, and welfare implications”, *Mathematical Social Sciences* 19, pp. 117-134.

Chakravarty, S. (1988): “On quasi-orderings of income profiles”, Methods of Operations Research 60, XIII Symposium on Operations Research, University of Paderborn.

Dasgupta, P., A. Sen y D. Starret (1973): “Notes on the measurement of inequality”, *Journal of Economic Theory* 6, pp.180-187.

Del Río, C. (1996): “Desigualdad y pobreza en España, de 1980-81 a 1990-91”, Tesis Doctoral no publicada, Universidad Carlos III de Madrid.

Del Río, C. (2000): “Desigualdad *Intermedia* Paretiana”, Documentos de Traballo 0002, Dpto. Economía Aplicada, Universidade de Vigo.

Del Río, C. y J. Ruiz-Castillo (2000): “Intermediate inequality and welfare”, *Social Choice and Welfare* 17, pp. 223-239.

Del Río, C. y J. Ruiz-Castillo (2001): “Intermediate inequality and welfare. The case of Spain, 1980-81 to 1990-91”, *Review of Income and Wealth* 47, pp. 221-237.

Gottschalk, P. y T. Smeeding (1997): “Crossnational comparisons of earnings and income inequality”, *Journal of Economic Literature* 35, pp. 633-686.

Harrison, E. y C. Seidl (1994): “Acceptance of distributional axioms: experimental findings”, en Eichorn*, W.* (ed) *Models and Measurement of Welfare and Inequality,* pp. 67-99, Springer-Verlag.

Kolm, S. C. (1976a): “Unequal inequalities I”, *Journal of Economic Theory* 12, pp. 416-442.

Kolm, S. C. (1976b): “Unequal inequalities II”, *Journal of Economic Theory* 13, pp. 82-111.

Krtscha, M. (1994): "A new compromise measure of inequality", en W. Eichhorn, (ed) *Models and Measurement of Welfare and Inequality,* pp. 111-119, Springer-Verlag.

Moyes, P. (1987): "A new concept of Lorenz domination", *Economics Letters* 23, pp. 203-207.

Pfingsten, A. y C. Seidl (1997): "Ray invariant inequality measures", en Zandvakili, S. y D. Slotje (eds.) *Research on Taxation and Inequality,* JAY Press, pp. 107-129.

Seidl, C. and B. Theilen (1994): "Stochastic independence of distributional attitudes and social status. A comparison of German and Polish Data", *European Journal of Political Economy* 10, pp. 295-310.

Shorrocks, A. (1983): "Ranking income distributions", *Economica* 50, pp. 3-17.

Abstract

In Del Río and Ruiz-Castillo (2000) a new concept of intermediate inequality between the absolute and relative concept was proposed, and empirical procedures for a welfare analysis à la Shorrocks (1983) where developed. The aim of this paper is to use this methodology to difine a new concept, ($\mathbf{x}$, ., p)*-inequality, in order to range income distributions with higer relative inequality than the status quo, where the above concept dos not apply. The interest of this approach is that we do not need to assume an a priori notion of inequality. In this vein, the data are the ones which allow us to characterize the inequality concept that makes two distributions be equivalent.*

Keywords: Intermediante inequality, social welfare, income distribution.

Recepción del original, enero de 2000
Versión final, septiembre de 2001