Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. X, n.º 2 (1986), págs. 279-308

INFLUENCIAS INTERREGIONALES: UN PROCEDIMIENTO DE ANALISIS Y MEDIDA

Juan CAÑADA VICINAY

Universidad Politécnica de Madrid

Analizando las influencias interregionales, contenidas en unas tablas «input-output» interregionales, mediante relaciones binarias, se consigue medir los grados de interdependencia y de dominación, entre pares de regiones y entre cada región y el conjunto nacional, de acuerdo con las siguientes características: a) contenido estructural en la medida en que son independientes de las dimensiones absoluta y relativa de las regiones; b) acotación perfecta, ya que siendo no negativos son de suma uno; c) permiten cuantificar las influencias por los lados de la oferta y de la demanda, según que el enfoque analítico contemple la estabilidad de los «inputs» o de los «outputs» respectivamente; d) su sectorización permite evaluar las influencias entre sectores homónimos de distintas regiones.

1. Introducción

Situado en el contexto de un sistema económico que admite una partición regional, y suponiendo disponible la información correspondiente a unas tablas «input-output» interregionales según diseño de Isard (1960), este artículo propone un procedimiento de análisis y medida de las influencias interregionales según el siguiente esquema de 2*2*2*2*2.

Dos tipos de influencias: las recíprocas y las no recíprocas, que dan lugar al establecimiento de las relaciones binarias de interdependencia (I) y de denominación (D). Esta diferenciación de las influencias supone un acercamiento al postulado de Perroux (1948), desarrollado por Aujac (1960) y Lantner (1972-1974), y un alejamiento del análisis de influencias en términos de «linkages» al estilo de Rasmussen (1956), Hirschman (1958), Yotopoulos y Nugent (1973-1976) que se centran en los vectores periféricos y en los coeficientes de variación de las matrices de «input» e inversa de Leontief. Considerando una partición de la economía nacional en r regiones y en n sectores, el procedimiento aquí desarrollado consiste en formular inicialmente, para cada uno de los casos abordados, una matriz de influencias interregionales[1] en dimensión $r \times r$, a partir de las inversas de «input» o de «output» de $nr \times nr$. A continuación y por aplicación de las

[1] Estas matrices recogen las influencias en términos de funciones de densidad, por tanto son de carácter estocástico, lo que supone un acercamiento al análisis probalístico de Hirschman y permite otras posibilidades de estudio, entre ellas la de entropía aplicada por Theill (1966) y Watanabe (1969) inicialmente, y más recientemente por Batten (1982) al análisis de la interdependencia espacial por estimación de los flujos interregionales. Por otro lado, la diferenciación de las componentes interdependiente y dominante de las influencias

relaciones I y D se definen las matrices de interdependencia y de dominación que soportan el grueso del análisis.

Dos enfoques de estabilidad: por columnas y por filas, caracterizados respectivamente por las matrices estructurales de «input» y de «output». El primer enfoque da lugar al estudio de las influencias por el lado del abastecimiento a los requerimientos nacionales de cada región, el segundo se centra en el estudio de los destinos de la producción nacional distribuida a instancias de cada región.

La adopción de este doble enfoque supone un acercamiento, en el contexto multirregional, a la interpretación de Jones (1976) de los «linkages» de Hirschman, y un alejamiento de los planteamientos de Lantner (1972-1974) y Brejon de Lavergnée (1984) que consideran las matrices de «input» e inversa de Leontief como las únicas apropiadas para el análisis de las influencias entre «polos» productivos y demandantes.

En este sentido cabe señalar con Duru *et al.* (1977-1982) que las influencias absolutas correspondientes a un enfoque de columnas son exactamente las mismas que las influencias relativas o «elasticidades» del enfoque de filas y viceversa. Esta correspondencia biunívoca entre tipos de influencia y enfoques, introduce elementos de ambigüedad en la diferenciación del contenido de éstos. Este artículo elimina esta ambigüedad, en el ámbito restringido de las influencias interregionales, mediante la definición de dos nuevos conjuntos de vectores regionales por redefinición de las formas reducidas. En el enfoque vertical se asocia a cada región el vector de requerimientos nacionales definido por su demanda final, mientras que en el enfoque horizontal se le asigna el vector de producción nacional distribuida a instancias de su valor añadido. Estos vectores se caracterizan por ser separables, lo que significa, por un lado, la superación de los problemas de estimación planteados por Miller (1969) y Guillen y Guccione (1980), y, por otro lado, la posibilidad de análisis en términos de coeficientes de abastecimiento a los requerimientos por regiones suministradores, y de coeficientes de destinos de la producción distribuida por regiones compradoras.

Estos coeficientes presentan dos características que los hacen idóneos para el estudio de las influencias: *a*) son independientes de la dimensión, absoluta y relativa, de las regiones; *b*) presentan para cada región la forma de una función de densidad, por lo que definen dos matrices estocásticas: la MKA por el lado de los aprovisionamientos y la MKD por el lado de los destinos.

Dado que las propiedades de MKA y MKD son idénticas y que el procedimiento de análisis es el mismo, aquí se desarrolla el correspondiente a MKA y se esboza el correspondiente a MKD. La MKA se estudia desde el punto de vista de las relaciones binarias I y D, lo que conduce a su desagregación en tres nuevas matrices: dos de interdependencia, entre regiones distintas ($MGIE$) y autoaprovisionamiento ($MGIA$), y una de dominación (MGD), siendo $MKA = MGIA + MGIE + MGD$. El estudio de estas matrices se realiza tanto según sus elementos

hace no necesaria ni la triangulación, basada en los principios teóricos de Chenery y Watanabe (1958), Aujac (1960) y Leontief (1963), ni el análisis secuencial de influencias de Yan y Ames (1965) y Fanjul y Segura (1975).

(relaciones binarias) como según sus vectores periféricos (relaciones de cada región con el sistema nacional), y concluye con la definición de una ecuación de síntesis[2] que pondera los coeficientes interregionales medios de dominación, de interdependencia entre regiones distintas y de autoaprovisionamiento.

Finalmente, se demuestra la consistencia del modelo horizontal utilizado, solucionándose de esta forma el problema de inconsistencia del modelo anterior de Polenske (1966) que se basa en los modelos verticales de información interregional restringida de Chenery (1954) y Moses (1955).

Dos dominios de producción: total e intermedia. En este punto se recoge el planteamiento de Rey y Tilanus (1963) que consideran la producción intermedia como la verdadera variable dependiente. Como la forma reducida de la producción intermedia es inmediata a partir de su equivalente en producción total, y como el procedimiento analítico es afín en ambos casos, aquí se desarrolla el correspondiente a la producción total y se esboza solamente el correspondiente a la intermedia. En lo que respecta a la comparación de las ecuaciones de síntesis, cabe señalar que los grados medios interregionales de dominación y de interdependencia entre regiones distintas son mayores en producción intermedia, mientras que el autoaprovisionamiento es más alto en producción total.

Dos niveles: regional y sectorial. Para cada enfoque y dominio el procedimiento permite el análisis, al nivel intermedio, entre pares de regiones y entre cada región y el conjunto del sistema nacional, y al nivel inferior entre pares de sectores.

Dos sectorizaciones: horizontal y vertical. En el caso, por ejemplo, de estabilidad por columnas y en el dominio de la producción total la sectorización horizontal estudia el comportamiento suministrador de cada sector i de cada región a los requerimientos i-nacionales regionalizados. La sectorización vertical analiza el comportamiento suministrador de cada región a los requerimientos exigidos por la técnica de producción de cada sector j regional. En ambos casos la MKA se descompone en n matrices sectorizadas (MKA_i, ${}_jMKA$, con $i, j = 1, \ldots, n$) que desembocan por un procedimiento mimético al ya conocido, en las correspondientes ecuaciones de síntesis. En la sectorización horizontal éstas evalúan el peso relativo de las componentes de dominación, de interdependencia entre sectores homónimos de regiones distintas y de autoaprovisionamiento para cada sector i. En la vertical se ponderan los mismos coeficientes pero referidos al equipamiento de las regiones respecto de los requerimientos de la técnica de producción de cada sector j regionalizado.

[2] Se trata de la siguiente ecuación: $\overline{GD} + \overline{GIE} + \overline{GIA} = 1$, cuyos sumandos son, respectivamente, los grados medios de dominación, de interdependencia entre regiones distintas y de autoaprovisionamiento. Se trata de la misma expresión a la que llega Lantner (1972-1974) por otras vías, en sus análisis de las influencias en un sistema sin partición. El interés del procedimiento que se desarrolla radica en la posibilidad de establecer una ecuación de síntesis de las mismas características en cada caso planteado según el esquema de 2*2*2*2*2.

2. Influencias interregionales: caso de estabilidad por columnas

2.1. *Formalización preliminar*

Este artículo se desarrolla en el contexto del modelo «ideal»[3] de análisis «input-output» interregional esbozado por Isard (1960), en el que se suponen conocidos los flujos intersectoriales intra e interregionales[4]. En el presente apartado se utiliza la formalización original que presupone la rigidez de la función de producción, caracterizada por una composición fija de los insumos por unidad de producto de cada sector de cada región, y que establece el equilibrio ex-post entre la producción alcanzada y sus empleos.

En el caso de que el sistema nacional abordado diferencie n sectores (i, j = = $\{1,\dots,n\}$) y admita una partición en r subsistemas regionales (α, $\beta = \{1, \dots, r\}$) complementarios, la información necesaria y supuestamente disponible es $X^{(r)}$, $D^{(r)}$, $V^{(r)}$ y $F^{(r)}$, donde:

$X^{(r)}$ vector de $nr \times 1$ de actividad total del sistema regionalizado, formado por yuxtaposición de los r vectores X^{α} de las regiones. La complementaridad de la partición se expresa por: $X = \sum_{\alpha=1}^{r} X^{\alpha}$.

$D^{(r)}$ vector de demanda final nacional regionalizado. Mismas relaciones con sus homónimos regionales (D^{α}) que en el caso de X.

$V^{(r)}$ vector de valor añadido nacional regionalizado. Mismas relaciones con sus homónimos regionales (V^{α}) que en los casos de X y D.

$F^{(r)} = |X_{ij}^{\alpha\beta}|$ matriz de $nr \times nr$ de flujos intermedios regionalizados. Cada $X_{ij}^{\alpha\beta}$ recoge las ventas de producción intermedia realizadas por el sector i de la región α ($R - \alpha$ en lo sucesivo) al sector j de la $R - \beta$.

$\hat{}$ indica diagonalización del vector, $'$ señala la matriz transpuesta.

La matriz estructural de coeficientes de «input»[5] es de obtención inmediata ($A^{(r)} = F^{(r)} \cdot \hat{X}^{(r)-1} = |X_{ij}^{\alpha\beta}/X_j^{\beta}| = |a_{ij}^{\alpha\beta}|$) y se caracteriza por ser semidefinida positiva ($0 \leqslant a_{ij}^{\alpha\beta} \leqslant 1$). Igual que $F^{(r)}$, $A^{(r)}$ es de dimensión $nr \times nr$ y se compone de r^2 submatrices de $n \times n$ que recogen los coeficientes de «input» intrarregionales ($A^{\alpha\alpha}$: las r submatrices de la diagonal principal) e interregionales ($A^{\alpha\beta}$, con

[3] Según calificativo de Richardson (1972, pág. 57 y siguiente). Véase Isard (1960, pág. 371.)

[4] Otros modelos interregionales que no exigen el conocimiento desagregado al nivel intersectorial de los flujos interregionales, son principalmente el de Chenery (1954) y Moses (1955) que utiliza unos coeficientes interregionales de importación únicos (medios) para cada producto regional sin distinción de los sectores utilizadores; su versión en términos de coeficientes de exportación desarrollada por Polenske (1966); y el modelo gravitacional de Leontief-Strout (1963).

[5] Denominación usual de Leontief (1966) y aconsejada por Morillas (1983) para los casos en que se manipulen datos en valor. La matriz de coeficientes técnicos A^* se reservará para los flujos en cantidades físicas. La diagonalización del vector p de precios relaciona ambas matrices: $A = \hat{p}A^*\hat{p}^{-1}$. Lo que implica que detrás de una estructura rígida de insumos,

$\alpha \neq \beta$: las $r^2 - r$ restantes). La participación de los «inputs» primarios en la técnica de producción de cada sector j de cada región se recoge en el vector $v^{(r)\prime} = V^{(r)\prime}\hat{X}^{(r)-1}$.

Con estos datos la forma estructural por columnas se define por:

a) estabilidad en la función de producción de cada sector regional: $U' = U'A^{(r)} + v^{(r)\prime}$ (con U vector unitario de la dimensión requerida), de donde para cada sector j de cada $R - \beta$ se tiene:

$$\sum_{\alpha}^{r} \sum_{i}^{n} a_{ij}^{\alpha\beta} + v_j^{\beta} = 1 \quad ; \quad \text{con } a_{ij}^{\alpha\beta} \neq a_{ij}^{\alpha\gamma} \quad \text{y} \quad v_j^{\beta} \neq v_j^{\gamma}, \qquad [1]$$

constantes y no negativos.

b) equilibrio ex-post en los empleos de la producción:

$$X^{(r)} = F^{(r)} \cdot U + D^{(r)} = A^{(r)} \cdot X^{(r)} + D^{(r)}, \qquad [2]$$

lo que llevado al nivel de cada sector i de cada $R - \alpha$ implica que:

$$X_i^{\alpha} = \sum_{\beta}^{r} \sum_{j}^{n} a_{ij}^{\alpha\beta} \cdot X_j^{\beta} + D_j^{\alpha},$$

Conocida la forma estructural [2] y suponiendo que se dan las condiciones de estabilidad de la matriz $(I - A)$ que aseguran el contenido económico de su inversa[6], la obtención de la forma reducida, en la que las variables endógenas son explicadas únicamente por las exógenas, es inmediata. El vector regionalizado de actividad nacional adopta la siguiente expresión:

$$X^{(r)} = (I - A^{(r)})^{-1} D^{(r)} = B^{(r)} \cdot D^{(r)}, \qquad [3]$$

el vector de producción de cada $R - \alpha$ queda definido por:

$$X^{\alpha} = \sum_{\beta} B^{\alpha\beta} \cdot D^{\beta} = \sum_{\beta} {}^{\beta}X^{\alpha}, \qquad [4]$$

y la producción total de cada sector i de cada $R - \alpha$ se expresa por:

$$X_i^{\alpha} = \sum_{\beta} \sum_{j} b_{ij}^{\alpha\beta} D_j^{\beta} = \sum_{\beta} {}^{\beta}X_i^{\alpha}$$

donde ${}^{\alpha}X^{\alpha} = B^{\alpha\alpha}D^{\alpha}$ es el vector de $n \times 1$ que recoge la producción total, directa más inducida, que debe realizar la $R - \alpha$ con el fin de asegurar la obtención de su propia demanda final nacional (D^{α}); ${}^{\beta}X^{\alpha} = B^{\alpha\beta}D^{\beta}$ representa el vector de producción inducida por la $R - \beta$ en la $R - \alpha$ para que aquélla pueda asegurar la obtención de su demanda final nacional (D^{β}). Por tanto, $B^{\alpha\beta}$ es la matriz de

subyace la hipótesis de precios fijos y, por tanto, la no substitución de factores. Véase Theil (1966, pág. 188).

[6] Se trata de las condiciones de Hawkins-Simon (1949) que exigen que los menores principales de $I - A^{(r)}$ sean positivos, y de las de Solow (1952) que exigen que la norma uno de líneas y columnas de $A^{(r)}$ sea menor que uno. Las condiciones de estabilidad de los modelos de Leontief-Strout y de Chenery-Moses han sido estudiadas por Bon (1984).

generación de producto[7] en la $R - \alpha$ a instancias de la $R - \beta$. Sus coeficientes, $b_{ij}^{\alpha\beta} \geqslant 0$, cuantifican el producto que el sector i de la $R - \alpha$ debe suministrar al sistema, por cada unidad de demanda final nacional del sector j de la $R - \beta$. Los $b_{ij}^{\alpha\beta}$ (con $i \neq j$, y/o $\alpha \neq \beta$) recogen exclusivamente producción intermedia inducida, mientras que los $b_{ii}^{\alpha\alpha} \geqslant 1$ recogen simultáneamente producción final (1) e inducida ($b_{ii}^{\alpha\alpha} - 1 \geqslant 0$).

La expresión [3] muestra cómo cada vector regional de variables dependientes es explicado por el conjunto de los vectores de variables independientes del sistema ($X^\alpha = X(D^1, ..., D^\alpha, ..., D^\beta, ..., D^r)$), es decir, la actividad total de cada región depende de las necesidades finales nacionales de cada una de su homónimas. Poniéndose así, por un lado, en evidencia las limitaciones de las regiones para establecer sus propias políticas económicas basadas en su demanda final nacional. Por otro lado, se manifiesta la imposibilidad formal de un tratamiento separado de las distintas regiones. Miller (1969) expone una solución a estos problemas que puesta en dos fases por Guillen-Guccione (1980) y aplicada a Asturias-Resto de España por Arango y al. (1982) consiste, inicialmente, en estimar los X^α mediante los ${}^\alpha X^\alpha$ (ante la hipótesis explícita de que D^β es el vector nulo para todo $\beta \neq \alpha$). Es decir, $X_{\text{est}}^\alpha = {}^\alpha X^\alpha = B^{\alpha\alpha} D^\alpha$, la separabilidad está, por tanto, asegurada, y a su vez, dado que los $B^{\alpha\alpha}$ se componen de los multiplicadores «interno» y «externo» de las $R - \alpha$, resulta inicialmente factible el análisis de influencias entre cada $R - \alpha$ y el conjunto del sistema. En segundo lugar, se trata de aislar el error de estimación del conjunto de vectores de demanda final nacional regional, para lo cual se realiza una reestimación del vector de actividad en términos del multiplicador interno regional ($X_{\text{rest}}^\alpha = (I - A^{\alpha\alpha})^{-1} D^\alpha$) y se cuantifica el porcentaje de error mediante la fracción formada por la diferencia (de normas uno) de ambos vectores estimados y el vector (su norma uno) de la primera estimación[8].

[7] El contenido de estas matrices $B^{\alpha\beta}$ en términos de las matrices estructurales es muy conocido en caso de dos regiones. Sean: $\alpha \neq \beta$, $\{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} B^{\alpha\alpha} &= [I - (I - A^{\alpha\alpha})^{-1} A^{\alpha\beta} (I - A^{\beta\beta})^{-1} A^{\beta\alpha}]^{-1} (I - A^{\alpha\alpha})^{-1} = \\ &= [I - A^{\alpha\alpha} - A^{\alpha\beta}(I - A^{\beta\beta})^{-1} A^{\beta\alpha}]^{-1} \\ B^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\alpha} A^{\alpha\beta} (I - A^{\beta\beta})^{-1} \end{aligned}$$

La primera expresión de $B^{\alpha\alpha}$ es utilizada por Miyazawa (1966) y Arango (1979), en ellas se contemplan claramente un «multiplicador interno» $(I - A^{\alpha\alpha})^{-1}$ y otro «multiplicador externo» $B^{\alpha\alpha}(I - A^{\alpha\alpha})$ que recogen la generación de producto regional en el caso de que la región actúe como un sistema propio y los «feedbacks» interregionales debido a que la región actúa en realidad como un subsistema dentro del sistema nacional. La caracterización de subsistema regional deriva del hecho de que la demanda final regional considerada es a su vez final nacional, omitiendo en esta categoría la parte de demanda final regional que es intermedia nacional $\sum_\beta A^{\alpha\beta} X^\beta$ en la forma estructural [2] y su reflejo $\sum_\beta B^{\alpha\beta} D^\beta$ en la forma reducida [3]. La segunda expresión de $B^{\alpha\alpha}$ es utilizada por Miller (1969) y Guillen-Guccione (1980) que definen el «multiplicador interno» de la misma forma y los «feedbacks» por diferencia $= B^{\alpha\alpha} - (I - A^{\alpha\alpha})^{-1}$. Para una partición en tres regiones puede consultarse Eskelinen (1981).

[8] Para los casos en que no se disponga de la información desagregada con el detalle exigido por el modelo de Isard, y suponiendo que se conoce la matriz global de coeficientes de

Dado que en la matriz $B^{\alpha\alpha}$, que define ${}^{\alpha}X^{\alpha}$, se registran los «feed-backs» interregionales producidos por las matrices estructurales $A^{\alpha\beta}$ y $A^{\beta\alpha}$ (para todo $\beta \neq \alpha$) se deduce que este procedimiento de estimación no busca reducir la información necesaria[9], sino la posibilidad de trabajar con submodelos regionales separados. Para lograr este objetivo existe, a mi entender, otra posibilidad que no necesita recurrir a estimaciones. Se trata de reconducir el análisis por la vía de los requerimientos productivos regionales definidos en el contexto nacional.

2.2. *La forma reducida en términos de requerimientos regionales*

En los párrafos que siguen se denominará vector de requerimientos productivos nacionales de cada región (o simplemente, vector de requerimientos de cada $R - \beta$) al vector ${}^{\beta}X$ que recoge la totalidad de la producción nacional necesaria para garantizar el abastecimiento de la demanda final nacional D^{β} de la citada región.

El cálculo de estos vectores de requerimientos es inmediato con sólo reescribir [3] por columnas, en lugar de hacerlo por líneas. Para cada $R - \beta$ tendremos:

$$ {}^{\beta}X = \sum_{\alpha} {}^{\beta}X^{\alpha} = \sum_{\alpha} B^{\alpha\beta} \cdot D^{\beta} = B^{\beta} \cdot D^{\beta} \qquad [5] $$

En estas condiciones, la forma reducida del sistema regionalizado, expresada en términos de requerimientos pasa a ser[10]:

$$ {}^{(r)}X\,{}' \; [B^{(r)} \cdot \hat{\hat{D}}^{(r)}]^{(\hat{})\prime} \cdot \hat{U} \cdot U $$

Definidos de esta forma los requerimientos su complementaridad está asegurada, así como su igualdad al nivel nacional con la producción distribuida:

$$ X = \sum_{\alpha}^{r} X^{\alpha} = \sum_{\beta}^{r} {}^{\beta}X, $$

«input» de cada $R - \alpha(A^{\alpha})$, Guillen-Guccione (1982) proponen aproximarse a las $A^{\alpha\alpha}$ y $A^{\beta\alpha}$ (en el caso birregional) en términos de escalares que evalúen el grado de autosuficiencia regional (λ), resultando: $A^{\alpha\alpha}_{\text{apr.}} = \lambda A^{\alpha}$; $A^{\beta\alpha}_{\text{apr.}} = (1 - \lambda)A^{\alpha}$.

9 En este caso el modelo de partida sería más bien el de Moses que el Isard, como se deduce de la nota anterior.

10 La expresión formal de esta forma reducida es algo más complicada que la forma original [3], pero sus operadores matriciales son lo suficientemente sencillos como para permitir su formulación: $\hat{}$ significa diagonalización restringida del vector (D) pasando de la dimensión nr a la rectangular $nr \times r$; ($\hat{}$) significa completar la diagonalización desde la dimensión $nr \times r$ a la cuadrada $nr \times nr$. Así, por ejemplo, para dos regiones:

$$ \hat{\hat{D}}^{(r)} = \begin{vmatrix} D_1^1 & 0 \\ D_2^1 & 0 \\ 0 & D_1^2 \\ 0 & D_2^2 \end{vmatrix} \quad ; \quad [B^{(r)}\hat{\hat{D}}^{(r)}](\hat{}) = \begin{vmatrix} {}^1X_1^1 & 0 & {}^2X_1^1 & 0 \\ 0 & {}^1X_2^1 & 0 & {}^2X_2^1 \\ {}^1X_1^2 & 0 & {}^2X_1^2 & 0 \\ 0 & {}^1X_2^2 & 0 & {}^2X_2^2 \end{vmatrix} $$

sin embargo, esta segunda igualdad no tiene por qué darse al nivel de la producción requerida y distribuida a la nación por cada región. A partir de [4] y [5] resulta:

$$X^{\beta} = \sum_{\alpha} B^{\beta\alpha} \cdot D^{\alpha} \neq {}^{\beta}X = B^{\beta} \cdot D^{\beta},$$

siendo: ${}^{(r)}X$ el vector nacional de requerimientos expresado en la dimensión nr por yuxtaposición de los r vectores ${}^{\beta}X$ de requerimientos regionales; $B^{\beta} = \sum_{\alpha} B^{\alpha\beta}$ (para todo $\beta = 1, \ldots, r$) representa el nuevo conjunto de matrices denominadas, por Cañada y Barreiro (1982), «multiplicadores nacionales de demanda final regional» debido a que recogen la producción total nacional necesaria para la obtención de un vector unitario de demanda final nacional de la $R - \beta$ considerada.

La expresión [5] es la que mejor muestra el interés del análisis en términos de requerimientos regionales, ya que para cada región éstos dependen única y exclusivamente de la demanda final nacional de la citada región (${}^{\beta}X = X(D^{\beta})$), siendo, por tanto, independientes de las demandas finales nacionales de sus homónimas. De esta forma queda asegurada la posibilidad de un tratamiento por separado de los vectores de requerimientos regionales.

2.3. *Matriz de coeficientes de abastecimiento a los requerimientos regionales*

El carácter separable de los vectores de requerimientos regionales permite avanzar en la delimitación de las componentes recíproca y no recíproca de las influencias entre pares de regiones. A tal efecto, y para todo par, $R - \alpha$, $R - \beta$, se evaluarán las influencias mutuas, en términos relativos, mediante el par de coeficientes ${}^{\beta}ka^{\alpha}$ y ${}^{\alpha}ka^{\beta}$ de abastecimiento de cada una a los requerimientos de la otra. Por ejemplo, la influencia ejercida por la $R - \alpha$ sobre la $R - \beta$ se evaluará por medio ${}^{\beta}ka^{\alpha}$ que recoge la fracción de los requerimientos nacionales de la $R - \beta({}^{\beta}X)$ abastecidos por la $R - \alpha({}^{\beta}X^{\alpha})$. Siendo ${}^{\beta}X_c = U'{}^{\beta}X$ y ${}^{\beta}X_c^{\alpha} = U'{}^{\beta}X^{\alpha}$, respectivamente, las normas uno de ambos vectores, se tiene:

$${}^{\beta}ka^{\alpha} = \frac{{}^{\beta}X_c^{\alpha}}{{}^{\beta}X_c} = \frac{U'B^{\alpha\beta}D^{\beta}}{U'B^{\beta}D^{\beta}} \quad ; \quad \text{con} \sum_{\alpha} {}^{\beta}X^{\alpha} = {}^{\beta}X \qquad [6]$$

de donde resulta:

$$\sum_{\alpha} {}^{\beta}ka^{\alpha} = 1 \quad ; \quad \text{con } 0 \leqslant {}^{\beta}ka^{\alpha} \leqslant 1 \quad ; \quad \forall\, \alpha \quad ; \quad \beta = 1, \ldots, r$$

La expresión [6] muestra que los ${}^{\beta}ka^{\alpha}$ sólo dependen de la orientación del vector D^{β} de demanda final nacional de la $R - \beta$ cuyos requerimientos están siendo estudiados. Por tanto, si se toma como aproximación a la dimensión regional, en el contexto nacional, su vector de demanda final nacional, resulta que los ${}^{\beta}ka^{\alpha}$ son independientes de la dimensión, absoluta y relativa, de las regiones, $R - \alpha$ y $R - \beta$, del par considerado[11].

Calculados los coeficientes ${}^{\beta}ka^{\alpha}$[12] y de cara a un análisis global de las influencias interregionales se procede a su ordenación matricial, definiéndose la matriz MKA:

$$MKA = |{}^{\beta}ka^{\alpha}| = \begin{vmatrix} {}^{1}ka^{1} & & {}^{1}ka^{\alpha} & & {}^{1}ka^{r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^{\beta}ka^{1} & \cdots & {}^{\beta}ka^{\alpha} & \cdots & {}^{\beta}ka^{r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^{r}ka^{1} & & {}^{r}ka^{\alpha} & & {}^{r}ka^{r} \end{vmatrix} \qquad [7]$$

Los vectores periféricos de esta matriz MKA de coeficientes de aprovisionamiento a los requerimientos regionales presentan un elevado interés analítico. Por un lado, el vector columna de suma de los elementos de cada línea (${}^{\beta}KA = MKA \cdot U = U$) es por definición el vector unidad[13], esto significa que tanto el

[11] La posibilidad de realizar un tratamiento aislado (y no sesgado) de la demanda final, constituye, como se ha visto, una de las preocupaciones (no logradas, debido a la presencia de los errores de estimación) de Miller, Guillen y Guccione. Los coeficientes ${}^{\beta}ka^{\alpha}$ formulados en [6] presentan esta propiedad y con carácter exclusivo. En efecto, supongamos que pretendemos analizar las influencias interregionales a partir de la forma reducida original [3], en términos de los correspondientes coeficientes de empleos (destinos) de la producción de cada región. Su formalización correspondería a:

$${}^{\beta}ke^{\alpha} = ({}^{\beta}Xc^{\alpha})/(X^{\alpha}c) = (U'B^{\alpha\beta}D^{\beta})/\left(U' \sum_{\beta} B^{\alpha\beta}D^{\beta}\right) = Ke(D^{1}, \ldots, D^{\alpha}, \ldots, D^{r})$$

donde se manifiesta claramente que cada «*ke*» depende de las dimensiones absolutas y relativas de todas las regiones de la partición.

[12] Siguiendo a Laumas (1976) en su análisis de ponderación de «linkages», cabe señalar que de cara a una versión más operativa de los «*ka*», y según se pueda o no prescindir de la estructura de la demanda final nacional de las regiones, su formulación se hará directamente a partir de las matrices de multiplicación $B^{\alpha\beta}$ o de sus normalizadas (ponderadas) $Bn^{\alpha\beta}$. Denominemos ${}^{\beta}kan^{\alpha}$ y ${}^{\beta}kae^{\alpha}$, respectivamente, a los coeficientes de aprovisionamiento normalizados y no normalizados o estructurales, definamos por $\cdots$ la suma de los elementos de la matriz considerada, entonces de [11] resultarán:

$${}^{\beta}kan^{\alpha} = b^{\alpha\beta}_{n..}/b^{\beta}_{n..} \quad ; \quad {}^{\beta}kae^{\alpha} = b^{\alpha\beta}_{..}/b^{\beta}_{..}$$

siendo cada elemento de la normalizada el resultado de ponderar los elementos de la no normalizada según los pesos relativos de los componentes de la demanda final nacional de la $R - \beta$ cuyos requerimientos se están analizando ($bn^{\alpha\beta}_{ij} = b^{\alpha\beta}_{ij}D^{\beta}_{j}/h$, donde h, factor de escala, es el inverso de la norma uno del vector $D^{(r)}$, o esta cantidad multiplicada por 100.000). De las expresiones anteriores se derivan la igualdad y la desigualdad siguientes: ${}^{\beta}kan^{\alpha} = {}^{\beta}ka^{\alpha} \neq {}^{\beta}kae^{\alpha}$. La igualdad indica que los coeficientes normalizados son idénticos a los verdaderos. La desigualdad muestra que la no normalización introduce un sesgo, cuyo signo es indeterminado, como consecuencia de una ponderación arbitrariamente uniforme.

[13] Las líneas de MKA tienen, por tanto, las características de una función de densidad, lo que significa que MKA es una matriz estocástica. Esta propiedad permite plantear el análisis de las influencias en términos de entropía, según procedimientos desarrollados en otro contexto por Watanabe (1969), Guiasu, Vermont-Desroches (1982), Batten (1982), entre otros autores.

sistema nacional en su conjunto, como cada uno de los subsistemas regionales de la partición, están plentamente abastecidos. El análisis de los sumandos de cada componente de este vector $({}^{\beta}ka = \sum_{\alpha} {}^{\beta}ka^{\alpha} = 1)$ informa del origen regional $(R - \alpha)$ del aprovisionamiento de los requerimientos de cada $R - \beta$. Por otro lado, el vector línea de suma de los elementos de cada columna de la MKA $(KA^{\alpha\prime} = U' \cdot MKA)$ evalúa en sus componentes el comportamiento suministrador de cada subsistema regional $R - \alpha$ a los requerimientos regionalizados del sistema $(ka^{\alpha} = \sum_{\beta} {}^{\beta}ka^{\alpha} \gtreqless 1)$. La confrontación de estos dos vectores permite distinguir inmediatamente las regiones suministradoras netas $(ka^{\alpha} > 1)$ de las receptoras netas $(ka^{\alpha} < 1)$, respecto a los requerimientos regionalizados de un sistema equilibrado (la norma uno de ambos vectores es necesariamente idéntica e igual a «*r*», número de regiones de la partición).

2.4. *Reciprocidad y no reciprocidad en las influencias interregionales*

Establecida la matriz MKA y siguiendo la interpretación de Aujac del postulado de Perroux[14], se definen para cada par, $R - \alpha$, $R - \beta$, dos relaciones binarias: la de interdependencia I, y la dominación D, asociadas, respectivamente, a las componentes recíproca y no recíproca de sus influencias.

a) INFLUENCIAS RECÍPROCAS: RELACIÓN BINARIA DE INTERDEPENDENCIA I.

Definida la influencia ejercida por la $R - \alpha$ sobre la $R - \beta$ por ${}^{\beta}ka^{\alpha}$, es decir, por la participación de $R - \alpha$ en el abastecimiento de los requerimientos de $R - \beta$, y la influencia de $R - \beta$ sobre $R - \alpha$ por ${}^{\alpha}ka^{\beta}$, se dirá que ambas regiones son interdependientes cuando cada una influye en su pareja. Su grado de interdependencia (GI) se cuantificará por la menor de las influencias registradas. La relación I presenta las siguientes propiedades[15]:

a) I es simétrica: $\alpha I \beta \Leftrightarrow \beta I \alpha$ ya que se da I si, y solamente si ${}^{\alpha}ka^{\beta}$ y ${}^{\beta}ka^{\alpha}$ son positivos.

b) I es reflexiva: $\alpha I \alpha$ existe si, y solamente si ${}^{\alpha}ka^{\alpha} > 0$.

c) I es no completa: Si ${}^{\alpha}ka^{\beta} = 0$ y/o ${}^{\beta}ka^{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha \not{I} \beta$.

d) I es no transitiva: para tres regiones $R - \alpha$, $R - \beta$, $R - \gamma$ la no nulidad ${}^{\alpha}ka^{\beta}$, ${}^{\beta}ka^{\alpha}$, ${}^{\beta}ka^{\gamma}$ y ${}^{\gamma}ka^{\beta}$, no implica la no nulidad de ${}^{\alpha}ka^{\gamma}$ y ${}^{\gamma}ka^{\alpha}$.

[14] Perroux (1948), pág. 248 y siguientes; Aujac (1960), pág. 183 y siguientes.
[15] La relación I así definida puede ser descompuesta en otras dos relaciones de interdependencia: la $I_{(A)}$ que recoge el autoaprovisionamiento de cada región, sus características son la reflexiva y la no completa; la $I_{(E)}$ que estudia la interdependencia entre regiones distintas, y cuyas propiedades son la simétrica, la no completa y la no transitiva.

La cuantificación del grado de interdependencia, GI, es inmediata:

$$GI(\alpha;\ \beta) = [\text{menor}]\{{}^{\beta}ka^{\alpha},\ {}^{\alpha}ka^{\beta}\} \qquad [8]$$

de la simetría de I resulta que $GI(\alpha;\ \beta) = GI(\beta;\ \alpha)$, de su carácter no completo y a partir de [6] se deduce:

$$0 < GI(\alpha;\ \beta) \leqslant 1, \quad \text{cualquiera que sean } \alpha \text{ y } \beta = 1, \ldots, r \qquad [9]$$

El límite inferior del intervalo $]0,\ 1]$ de acotación de GI, asociado a la propiedad no completa de I, no pertenece al intervalo pero es un punto de acumulación del mismo. Observándose que la ausencia de I no implica independencia, ya que las regiones del par pueden estar vinculadas por la relación D (esto ocurrirá cuando uno de los ka sea nulo, siendo positivo el otro). El límite superior representa el caso improbable de la interdependencia absoluta del par, ya que la totalidad de los requerimientos de cada región son suminitrados por su pareja.

b) INFLUENCIAS NO RECÍPROCAS: RELACIÓN BINARIA DE DOMINACIÓN D

Los términos en que ha sido definida I no agotan las influencias entre las regiones del par considerado. En efecto, una componente no recíproca aparece con la desigualdad ${}^{\alpha}ka^{\beta} \neq {}^{\beta}ka^{\alpha}$. Definamos la relación D para analizar esta componente, de manera que si se da D en la forma $\alpha D\beta$ se dirá que la $R - \alpha$ domina a su pareja la $R - \beta$. En los términos de Perroux, esto significa que la influencia ejercida por la $R - \alpha$ sobre la $R - \beta$ es mayor que la influencia ejercida en sentido opuesto, es decir, $\alpha D\beta$ implica que ${}^{\beta}ka^{\alpha} > {}^{\alpha}ka^{\beta}$. Las propiedades de la relación binaria D son:

a) D es antisimétrica: la incompatibilidad de ${}^{\beta}ka^{\alpha} > {}^{\alpha}ka^{\beta}$ con ${}^{\alpha}ka^{\beta} > {}^{\beta}ka^{\alpha}$ implica que $\alpha D\beta$ y $\beta D\alpha$ se excluyan mutuamente.

b) D es no reflexiva: la imposible desigualdad ${}^{\alpha}ka^{\alpha} > {}^{\alpha}ka^{\alpha}$ implica $\alpha \not{D}\, \alpha$.

c) D es no completa: la posible igualdad ${}^{\alpha}ka^{\beta} = {}^{\beta}ka^{\alpha} \Rightarrow \alpha \not{D}\, \beta;\ \beta \not{D}\, \alpha$.

d) D es no transitiva: para las $R - \alpha$, $R - \beta$, $R - \gamma$, las desigualdades ${}^{\beta}ka^{\alpha} > {}^{\alpha}ka^{\beta}$; ${}^{\gamma}ka^{\beta} > {}^{\beta}ka^{\gamma}$ no implican la desigualdad ${}^{\gamma}ka^{\alpha} > {}^{\alpha}ka^{\gamma}$.

Delimitada la relación D su cuantificación es inmediata. Supongamos que en el par $R - \alpha$; $R - \beta$ se da D en el sentido $\alpha D\beta$ (${}^{\beta}ka^{\alpha} > {}^{\alpha}ka^{\beta}$). Denominando por $GD(\alpha/\beta)$ al grado de dominación ejercido por la $R - \alpha$ sobre $R - \beta$, tendremos:

$$GD(\alpha/\beta) = {}^{\beta}ka^{\alpha} - {}^{\alpha}ka^{\beta} = [\text{mayor} - \text{menor}]\{{}^{\beta}ka^{\alpha};\ {}^{\alpha}ka^{\beta}\} \qquad [10]$$

resultando de [16] y de [12]:

$$0 < GD(\alpha/\beta) \leqslant 1; \quad \text{para todos } \alpha, \beta = 1, \ldots, r; \quad \text{con } \alpha \neq \beta \qquad [11]$$

que el grado de dominación es estrictamente positivo[16] y está acotado por el mismo intervalo]0; 1] que el grado de interdependencia. La perfecta definición[17] y acotación de los GI y GD[18], así como su estabilidad estructural, derivada de su independencia de las dimensiones de las regiones concernidas, permite analizar con precisión las influencias existentes entre pares de regiones por el lado del abastecimiento a sus requerimientos productivos[19] definidos en el contexto del sistema nacional.

2.5. *Matrices de interdependencia y de dominación*

De cara a un análisis global de las influencias cabe diferenciar matricialmente las componentes interdependiente (matriz MGI) y dominante (matriz MGD) de las relaciones entre pares de regiones. Las nuevas matrices de dimensión $r \times r$ se definen a partir de la MKA y de las propiedades de las relaciones I y D. Las casillas (β, α) (con $\beta, \alpha = 1, \ldots, r$) de la MGD recogen el grado de dominación de la región que encabeza la columna sobre la que encabeza la fila. Por el carácter no completo de D se sabe que GD, cuando existe, es estrictamente positivo, resultando que MGD es semidefinida positiva[20]:

[16] La existencia de una relación binaria de dominación implica la coexistencia de los elementos del par en los papeles de dominante y dominado, de forma que la dominación ejercida por uno de ellos es justamente la soportada por su pareja. Por ello, definiendo el papel de uno de los elementos del par queda definida su relación. Este argumento es suficiente para definir la relación D en términos positivos, abandonando la posibilidad de definir un GD positivo para la región dominante, junto a un GD negativo para la dominada. Tal definición resultaría redundante, y dificultaría el análisis en términos de matrices de interdependencia y de dominación que se aborda en el párrafo que sigue.

[17] La definición precisa de las relaciones binarias es completamente necesaria (en contra de lo que parece opinar Brejon de Lavergnée (1984, pág. 119 y siguientes) respecto de la transitividad) ya que ello va a permitir explorar otros dominios de análisis. En efecto, cuando las relaciones son reflexivas y transitivas conforman estructuras topológicas, cuando la transitividad no está garantizada, como es el caso, nos vemos obligados a pensar en estructuras pretopológicas, al estilo de las desarrolladas por Mougeot, Duru y Auray (1977-1982). Pero es que además, cuando se da una relación no reflexiva, como es la planteada para D sólo quedan dos posibilidades, o bien forzar la reflexividad, con lo cual el intervalo de GD sería [0; 1], o trabajar con estructuras pobres, todavía no muy aplicadas al análisis económico. Véase en este aspecto Auray (1982).

[18] Dada la complementaridad de las relaciones I y D, resulta que el conjunto de las influencias entre pares de regiones queda acotado por el mismo intervalo]0, 1] que GI y GD. De [14], [15], [16] y [17] se deduce: $GT(\alpha; \beta) = GI(\alpha; \beta) + GD(/) = [\text{mayor}]\ \{{}^{\beta}ka^{\alpha}, {}^{\alpha}ka^{\beta}\} \Rightarrow 0 < GT \leqslant 1$.

[19] Así definida D no es completamente ajena a la metodología de Aujac (1960) cuando establece el criterio del «mejor cliente» para analizar las relaciones entre pares de sectores por el lado de la demanda. En D subyace el criterio del «mejor suministrador», ya que la región dominante aprovisiona en mayor medida los requerimientos nacionales de su pareja. Si la no reciprocidad se da en los términos $\alpha D \beta$ diremos que $R - \alpha$ es «mejor suministradora» que $R - \beta$ en su relación mutua, ya que le suministra unilateralmente una fración de los requerimientos de ésta.

[20] Es decir, los elementos de la MGD son positivos o nulos. Un elemento positivo señala que la relación D se da en el sentido de que la región que encabeza la columna domina a la

$$MGD = |GD(\alpha/\beta)| = MKA - MKA', \text{ con:} \qquad [12]$$

$$\begin{cases} |GD(\alpha/\beta) > 0| = |{}^{\beta}ka^{\alpha} - {}^{\alpha}ka^{\beta} > 0| \\ |GD(\alpha/\beta) = 0| \text{ si } |{}^{\beta}ka^{\alpha} - {}^{\alpha}ka^{\beta} \leqslant 0| \end{cases}$$

por la asimetría de D se tiene que $GD(\alpha/\beta) > 0 \Rightarrow GD(\beta/\alpha) = 0$, no siendo cierta la recíproca, debido al carácter no completo de D. Por la no reflexiva se sabe que MGD es de traza nula (todos los elementos de la diagonal principal lo son), y por la no transitiva de rango $\leqslant r$.

Del carácter complementario de I y D se deriva la complementaridad de las matrices de grados de interdependencia (MGI) y dominación (MGD), por tanto:

$$MGI = |GI(\alpha;\ \beta)| = MKA - MGD \qquad [13]$$

que es simétrica debido a la propiedad homónima de I. La diferenciación de las dos componentes de I (véase nota 15), la reflexiva $I_{(A)}$ y la no reflexiva $I_{(E)}$, implica la descomposición de MGI en dos sumandos: las matrices $MGIA$ y $MGIE$ de interdependencia por autoaprovisionamiento y por aprovisionamiento entre regiones distintas. La primera es diagonal y de la misma traza que MGI, la segunda es simétrica y de traza nula, y ambas son semidefinidas positivas al igual que MKA y MGD.

2.6. *Interdependencia y dominación regionales respecto del conjunto nacional*

Descompuesta la MKA en las submatrices correspondientes:

$$MKA = MGI + MGD = MGIA + MGIE + MGD \qquad [14]$$

estamos en condiciones de analizar el papel desempeñado por cada subsistema regional en el contexto del sistema nacional. Profundizando lo apuntado en 2.3 al diferenciar las regiones suministradoras netas ($ka^{\alpha} > 1$) de las receptoras netas ($ka^{\alpha} < 1$), se evalúan los vínculos mantenidos por cada región con el sistema en las vertientes de interdependencia y de dominacón.

Dado su carácter simétrico, los vectores periféricos de cada matriz de interdependencia ($MGI = MGIA + MGIE$) son idénticos. Sus elementos:

$$GI(\alpha;) = GIA(\alpha;) + GIE(\alpha;) \qquad [15]$$

región que encabeza la fila. Un elemento nulo indica que la relación D no se da en este sentido. Por tanto, la presencia de elementos nulos refleja el carácter no completo de D, y por ello, no está en contradicción con la acotación del grado de dominación por el intervalo]0, 1].

representan[21] ($GI(\alpha;) = \sum_\beta GI(\alpha;\ \beta) = \sum_\beta GI(\beta;\ \alpha) = GI(;\alpha)$; $GIA(\alpha;) = GI(\alpha;\ \alpha) = {}^{\alpha}ka^{\alpha}$; $GIE(\alpha;) = \sum_\beta GI(\alpha;\ \beta)$, con $\alpha \neq \beta$) respectivamente los grados de interdependencia total respecto del sistema en su conjunto, de autoaprovisionamiento, y de interdependencia con el resto del sistema de cada $R - \alpha$. Dado el carácter estocástico de MKA resulta que los $GI(\alpha;)$, $GIA(\alpha;)$ y $GIE(\alpha;)$ están acotados por el mismo intervalo $]0,\ 1]$ que los $GI(\alpha;\ \beta)$. Con vistas a realizar análisis comparativos entre grados de interdependencia binarios y totales se define para cada $R - \alpha$ su grado medio de interdependencia con el sistema: $\overline{GI}(\alpha) = GI(\alpha;)/r$.

El grado GI de interdependencia del sistema en su conjunto, que evalúa el acumulado de las influencias recíprocas, se define mediante la norma uno de los vectores periféricos de MGI,

$$GI = \sum_\alpha GI(\alpha;) = \sum_\alpha \sum_\beta GI(\alpha;\ \beta) \qquad [16]$$

que, debido al carácter estocástico de MKA, está acotado por $]0,\ r]$. Los grados acumulados de autoaprovisionamiento (GIA) y de interdependencia entre regiones distintas (GIE) se definen, respectivamente, a través de las normas uno de los periféricos de $MGIA$ y $MGIE$, y por la misma razón están acotados por el mismo intervalo $[0,\ r]$. Debiéndose respetar por [14]: $GI = GIA + GIE$.

De cara a establecer comparaciones con los correspondientes $GI(\alpha;)$, $GIA(\alpha;)$ y $GIE(\alpha;)$ regionales se definen los grados medios del sistema:

$$\overline{GI} = \overline{GIA} + \overline{GIE}, \qquad [17]$$

Con $\overline{GI} = \sum_\alpha \overline{GI}(\alpha) = \sum_\alpha GI(\alpha;)/r$; $\overline{GIA} = \sum_\alpha GIA(\alpha;)/r$; $\overline{GIE} = \sum_\alpha GIE(\alpha;)/r$ acotados todos ellos por $]0,\ 1]$. La ordenación de mayor a menor de los $GI(\alpha;)$, $GIA(\alpha;)$, $GIE(\alpha;)$ regionales y su confrontación con el correspondiente grado medio de interdependencia permite diferenciar las regiones fuerte y débilmente interdependientes respecto del conjunto del sistema, del autoabastecimiento y del resto del sistema respectivamente.

En términos parecidos, aunque con las particularidades debidas a las propiedades de la relación D, se analizará la matriz MGD. Por la antisimétrica de D se sabe que MGD es no simétrica y, por tanto, sus vectores periféricos son distintos. Según [12], el vector línea de suma de los elementos de las columnas ($|GD(\alpha/)|'$) recoge en sus componentes el acumulado de los grados de dominación ejercidos por la R

[21] La primera y tercera ecuaciones se derivan de la identidad entre una matriz y su transpuesta cuando estas son simétricas. La segunda hace alusión, además, a la propiedad no reflexiva de D.

$-\alpha$ sobre el conjunto de sus homónimas. El vector columna de suma de los elementos de las líneas ($|GD(/\alpha)|$) recoge en sus componentes el acumulado de los grados de dominación ejercidos sobre la $R-\alpha$ por el resto del sistema. A su vez, por la no reflexiva de D resulta que la dominación ejercida por (sobre) una región sobre (por) su resto del sistema es idéntica a la ejercida sobre (por) el sistema en su conjunto.

Por diferencia de los periféricos de MGD se define el vector $|GD(\alpha)|$ de dominación neta de cada región, respecto del sistema. Sea para la $R-\alpha$:

$$GD(\alpha) = GD(\alpha/) - GD(/\alpha) = \sum_{\beta}^{r} GD(\alpha/\beta) - \sum_{\gamma}^{r} GD(\gamma/\alpha) \gtreqless 0 \quad ; \quad \gamma \neq \beta \qquad [18]$$

Este vector es no nulo y de norma uno igual a cero, lo que quiere decir que el sistema no ejerce dominación sobre sí mismo, ya que la dominación ejercida por unas regiones sobre el sistema $(GD(\alpha) > 0)$ se compensa totalmente con la ejercida por éste sobre el resto de las regiones $(GD(\alpha) < 0)$. Observándose, en este punto, que las regiones que dominan al sistema son las que actúan como «suministradoras netas», y que las regiones dominadas por el sistema son las «receptoras netas»[22]. Además de esta clasificación de regiones dominantes y dominadas, la ordenación de mayor a menor de los $GD(\alpha)$ permite establecer, de manera casi automática la jerarquía regional de dominación. Unicamente, cuando dos o más regiones tengan el mismo $GD(\alpha)$ se recurrirá a las relaciones binarias entre ellas, dando prioridad en la jerarquía a la región dominante de cada par. No obstante, la ordenación no quedará resuelta si entre las regiones con $GD(\alpha)$ idéntico se da la no transitividad. En tal caso se establecerán el indicador parcial de dominación de las regiones del subconjunto respecto del subsistema que ellas forman y su jerarquización parcial correspondiente. Adoptándose esta última como definitiva de este subconjunto de regiones en la jerarquización del sistema.

Definida la jerarquía regional de dominación y trasladada a la matriz MGD, se observará la disposición de los $GD(\alpha/\beta)$ en las casillas de la nueva MGD ordenada jerárquicamente. Si todos los $GD(\alpha/\beta)$ quedan por debajo de la diagonal principal asistimos a una jerarquización perfecta. La circularidad y no transitividad específicas de la dominación[23] se manifestarán en los $GD(\alpha/\beta)$ situados por encima de la diagonal.

El grado de dominación GD del sistema en su conjunto, que recoge el acumulado de las influencias no recíprocas, se define mediante la norma uno de los vectores periféricos de la MGD: $GD = \sum_{\alpha} GD(\alpha/) = \sum_{\alpha} GD(/\alpha) = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} GD(\alpha/\beta)$; que en

[22] Dado que $MKA = MGI + MGD$, y que MGI es simétrica, resulta que los vectores diferencia de vectores periféricos de las matrices MKA y MGD son idénticos. Esto significa que el grado de dominación de una región sobre el sistema es justamente su coeficiente de suministros netos.

[23] La posible circularidad en la relación D como diferente de la contenida en la I, diferencia el procedimiento propuesto del de Lantner (1972-1974) que asocia la circularidad exclusivamente a la autarquía y a la interdependencia (con el resto del sistema).

virtud del carácter estocástico de MKA está acotado por $]0, r]$. El grado medio de dominación soportado por el sistema:

$$\overline{GD} = GD/r \qquad [19]$$

acotado por]0, 1] permite realizar el análisis comparativo del comportamiento de cada región en los dos aspectos de la dominación, el de dominante $(GD(\alpha/))$ y el de dominada $(GD(/\alpha))$.

A partir de las expresiones [13], [17] y [19] resultan, en virtud del carácter estocástico de MKA:

$$\overline{GI} + \overline{GD} = 1 \qquad [20]$$

$$\overline{GIA} + \overline{GIE} + \overline{GD} = 1 \qquad [21]$$

$$\overline{GIE} + \overline{GD} = 1 - \overline{GIA} \qquad [22]$$

que evalúan el peso de la interdependencia y de la dominación en las interregionales del sistema. En [21] se reencuentra la relación de Lantner (1972-1974) cuando señala, en otro contexto[24], que: $a + i + t = 1$, donde «a» es la tasa de autarquía (correspondiente a $\overline{GIA}$), «i» es la interdependencia (en el sentido de relación no reflexiva o con el resto del sistema, correspondiente a $\overline{GIE}$), «t» es la triangularidad que cuantifica la dominación ($\overline{GD}$ en nuestro caso). En [22] se evalúa el peso de las influencias entre regiones distintas en sus dos componentes de interdependencia y de dominación.

[24] Lantner (1972-1974), Morillas (1983) evalúan esta relación a partir del determinante Δ de la matriz I-P, siendo P la matriz de coeficientes de «output» de un sistema no regionalizado. Se demuestra que Δ tiene un mayorante (Δ_{may}) en el producto de los elementos de la diagonal principal, y un minorante (Δ_{min}) en el producto de los coeficientes de demanda final o de dependencia externa. Dado que $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$, siendo $h = 1 - \Delta_{min}$ se calculan las siguientes tasas de autarquia (a), de interdependencia (i) y de triangularidad (t): $a = (1 - \Delta_{may})/h$; $i = (\Delta_{may} - \Delta)/h$; $t = (\Delta - \Delta_{min})/h$. Resultando: $a + i + t = 1$.

Sin embargo, esta no es la única forma de evaluar estas tasas en términos de Δ. Las matrices $A(a_{ij} = X_{ij}/X_j)$ de coeficientes de «input» y $P(p_{ij} = X_{ij}/X_i)$ de coeficientes de «output» tienen el mismo determinante. Por tanto, Δ es el determinante de I-P y de I-A. Como I-A e I-P tienen la misma diagonal principal el mayorante de Δ es único, no ocurriendo lo mismo con los minorantes, ya que a I-A le corresponde uń Δ^*_{min} que es el determinante de la matriz diagonal (ϑ_j) de coeficientes de valor añadido, que es evidentemente distinto de Δ_{min}, que corresponde al determinante de la matriz diagonal de coeficientes de demanda final ($\bar{d}_i$). Siendo $h^* = 1 - \Delta^*_{min} \neq h$, tendremos unas nuevas tasas i^*, a^* y t^* distintas de sus homónimas i, a y t pero que respetan igualmente la condición: $a^* + i^* + t^* = 1$.
Ante esta circunstancia cabe plantearse el interrogante sobre la razón en virtud de la cual se miden las tasas i, a y t a partir del minorante de I-P, en lugar de hacerlo a partir del correspondiente a I-A, cuando es esta la matriz que se invierte, y sobre la que se cuantifican las influencias entre polos demandantes (matriz $B = (I\text{-}A)^{-1}$) y entre polos productivos (matriz B-I). Influencias presentadas bajo forma de teorema por Lantner (1974, pág. 230). Véase, también, Lantner (1972, pág. 226 y siguiente), Morillas (1983, pág. 132 y siguiente), Brejon de Lavergnée (1984, págs. 118-119). La respuesta a este interrogante no es evidente,

2.7. *Sectorización de las influencias interregionales*

El procedimiento desarrollado en los epígrafes anteriores sintetiza las relaciones mantenidas por cada subsistema regional con sus homónimos y con el sistema nacional al que pertenecen. Para analizar la estructura interna de estas relaciones es necesaria y posible una doble sectorización de las mismas. Veamos:

a) SECTORIZACIÓN HORIZONTAL: INFLUENCIAS ENTRE SECTORES HOMÓNIMOS DE REGIONES DISTINTAS

La sectorización o desagregación horizontal, en el sentido de las líneas de la forma reducida [5], trata del estudio por separado de las relaciones I y D en cada una de las componentes (sectores i) de los vectores de requerimientos nacionales (${}^{\beta}X$) de las regiones.

Según [7] los requerimientos nacionales de productos i de la $R - \beta$, ${}^{\beta}X_i$, son (para todo $i = 1, ..., n$):

$$^{\beta}X_i = \sum_{\alpha} {}^{\beta}X_i^{\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{j} b_{ij}^{\alpha\beta} \cdot D_j^{\beta} = \sum b_{ij}^{\beta} \cdot D_j^{\beta} = \sum_{j}^{n} b_{ij}^{\beta} \cdot D_j^{\beta} \qquad [23]$$

donde ${}^{\beta}X_i^{\alpha} = \sum_{j} b_{ij}^{\alpha\beta} \cdot D_j^{\beta}$ representa los suministros del sector i de la $R - \alpha$ a los requerimientos i de la $R - \beta$.

Resultando, en virtud de [6], los siguientes coeficientes regionales de abastecimiento a los requerimientos i de la $R - \beta$:

$$^{\beta}ka_i^{\alpha} = \frac{^{\beta}X_i^{\alpha}}{^{\beta}X_i} = \frac{\sum_{j} b_{ij}^{\alpha\beta} \cdot D_j^{\beta}}{\sum_{j} b_{ij}^{\beta} \cdot D_j^{\beta}}, \quad \forall\ i = 1, ..., n \qquad [24]$$

que evidentemente respetan las condiciones de una función de densidad:

$$\sum_{\alpha} {}^{\beta}ka_i^{\alpha} = 1 \quad ; \quad \text{con } {}^{\beta}ka_i^{\alpha} \text{ acotado por }]0, 1], \quad \forall\ \alpha, \beta = 1, ..., r$$

pero está relacionada, a mi entender, con este desafortunado teorema de Lantner, ya que su cumplimiento exige el supuesto sumamente restrictivo, e innecesario, de «que sólo j (polo influyente) demanda i (polo influido)» (Morillas, op. cit., pág. 133), lo que implica que en cada caso $a_{ij} \neq 0$ con $a_{ih} = 0$, para todo $h \neq j$. Lo que quiere decir que no se trabaja con la matriz estructural A sino con relaciones aisladas (a_{ij}) de una forma estructural no separable. Este teorema es de lógica inconsistente y, por tanto, es no aplicable. La solución a esta situación debe venir por el empleo diferenciado de las matrices A y P y sus respectivos equilibrios ex-post en empleos y en insumos, tal y como se desarrollan en Augustinovics (1970), Jones (1976) y Duru-Mougeot-Auray (1977-1982).

La expresión [24] muestra, en las mismas condiciones que [6] para los ${}^{\beta}ka^{\alpha}$, que los ${}^{\beta}ka_i^{\alpha}$ dependen únicamente de la orientación del radio vector de D^{β}, siendo, por tanto, independientes de las dimensiones de las regiones de la partición[25].

Las n ecuaciones [23] conllevan la descomposición de la matriz MKA en otras n matrices MKA_i, de las mismas características y dimensión, de coeficientes de aprovisionamiento de los sectores i regionales a los requerimientos de productos i de las regiones (${}^{\alpha}ka_i^{\beta}$; $\forall\ \alpha, \beta = 1, \ldots, r$).

Las relaciones binarias I_i y D_i contenidas en cada matriz MKA_i tienen idénticas características que las I y D, y a ellas nos remitimos. Lo mismo ocurre con sus respectivos cuantificadores, $GI_i(\alpha; \beta)$ y $GD_i(\alpha/\beta)$, cuyas expresiones formales se exponen, no obstante a continuación: a partir de [8], [9], y [24], se obtiene que:

$$GI_i(\alpha; \beta) = [\text{menor}]\{{}^{\beta}ka_i^{\alpha}, {}^{\alpha}ka_i^{\beta}\}, \text{ siendo } 0 < GI_i(\alpha; \beta) \leqslant 1 \qquad [25]$$

con $GI_i(\alpha; \beta) = GI_i(\beta; \alpha)$ por la simétrica de I_i. Teniendo en cuenta [10], [11], y [24], resulta que:

$$GD_i(\alpha/\beta) = {}^{\beta}ka_i^{\alpha} - {}^{\alpha}ka_i^{\beta}; \text{ con } {}^{\beta}ka_i^{\alpha} > {}^{\alpha}ka_i^{\beta} \Rightarrow 0 < GD_i(\alpha/\beta) \leqslant 1 \qquad [26]$$

para todo $\alpha \neq \beta$ por la no reflexiva de D_i. Por la antisimétrica se tiene que si se da D_i en la forma $\alpha D_i \beta$ entonces $\beta \not{D}_i \alpha$, no siendo cierta su recíproca por la no completa.

El estudio del comportamiento suministrador de cada sector i regional a los requerimientos de productos i regionalizados del sistema se desarrollará a través de las matrices de dominación (MGD_i) y de interdependencia ($MGI_i = MGIA_i + MGIE_i$) entre los sectores i de las regiones. Resultando, a partir de las identidades $MKA_i = MGI_i + MGD_i = MGIA_i + MGIE_i + MGD_i$ homólogas de [14]:

$$\overline{GI}_i + \overline{GD}_i = 1 \quad ; \quad \overline{GIA}_i + \overline{GIE}_i + \overline{GD}_i = 1; \quad \forall\ i = 1, \ldots, r \qquad [27]$$

que evalúan los pesos relativos de la interdependencia y dominación entre los sectores i regionales. El peso relativo de las influencias entre sectores i de regiones distintas queda cuantificado por: $\overline{GIE}_i + \overline{GD}_i = 1 - \overline{GIA}_i$, donde $\overline{GIE}_i$ expresa la interdependencia entre sectores i de distintas regiones, mientras que $\overline{GIA}_i$ se refiere al autoaprovisionamiento regional en productos i.

[25] Los ${}^{\alpha}kae_i{}^{\beta}$ formulados en términos estructurales, esto es en términos exclusivos de las matrices $B^{\alpha\beta}$ y B^{β} (ante la hipótesis de $D^{\beta} = U$), mantienen con los kan_i normalizados exactamente la misma relación que los coeficientes medios regionales ${}^{\beta}kae^{\alpha}$ y ${}^{\beta}kan^{\alpha}$, según lo expuesto en nota 12.

b) SECTORIZACIÓN VERTICAL: INFLUENCIAS ENTRE REGIONES REFERIDAS A LOS REQUERIMIENTOS PRODUCTIVOS DE CADA SECTOR

La sectorización o desagregación vertical, en el sentido de las columnas de la forma reducida [5], entiende del estudio por separado de las relaciones I y D entre pares de regiones respecto de los requerimientos productivos de cada sector j. Se trata, por tanto, de analizar el comportamiento suministrador de cada región a las técnicas de producción de cada sector j regional[26].

Según [5] los requerimientos productivos nacionales del sector j de la $R - \beta$, ${}^{\beta}_{j}X$ (para todo $j = 1, \ldots, n$) que aseguran la obtención de una unidad de la demanda final nacional del sector j de la $R - \beta$ son:

$${}^{\beta}_{j}X = \sum_{\alpha} {}^{\beta}_{j}X^{\alpha} = \sum_{\alpha} b^{\alpha\beta}_{.j} \cdot D^{\beta}_{j} = b^{\beta}_{.j} \cdot D^{\beta}_{j} \qquad [28]$$

donde ${}^{\beta}_{j}X^{\alpha} = b^{\alpha\beta}_{.j} \cdot D^{\beta}_{j}$, representa los suministros de la $R - \alpha$ a los requerimientos productivos del sector j de la $R - \beta$, siendo $b^{\alpha\beta}_{.j}$ el acumulado de los elementos de la columna j de la matriz $B^{\alpha\beta}$.

En virtud de [6] resultan los siguientes coeficientes ${}^{\beta}_{j}ka^{\alpha}$ de abastecimiento de los sectores de la $R - \alpha$ a los requerimientos productivos del sector j de la $R - \beta$:

$${}^{\beta}_{j}ka^{\alpha} = \frac{{}^{\beta}_{j}X^{\alpha}}{{}^{\beta}_{j}X} = \frac{b^{\alpha\beta}_{.j}}{b^{\beta}_{.j}} \quad ; \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \qquad [29]$$

que respetan necesariamente las condiciones de función de densidad:

$$\sum_{\alpha} {}^{\beta}_{j}ka^{\alpha} = 1; \text{ con } {}^{\beta}_{j}ka^{\alpha} \text{ acotado por }]0,\, 1], \quad \forall\, \alpha, \beta = 1, \ldots, r$$

La expresión [29] muestra que los ${}^{\beta}_{j}ka^{\alpha}$ son totalmente independientes de la demanda final nacional de la $R - \beta$ y de las dimensiones de las regiones del par considerado[27].

Igual que en el caso anterior, las n ecuaciones [28] dan lugar a la descomposición de MKA en otras n matrices ${}_{j}MKA$, de las mismas características y dimensión, de coeficientes regionales de aprovisionamiento a los requerimientos productivos de los sectores j de cada región (${}^{\beta}_{j}ka^{\alpha}$, con $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$).

Las relaciones binarias ${}_{j}I$ y ${}_{j}D$ contenidas en cada matriz ${}_{j}MKA$ tienen idénticas

[26] En este punto debe tenerse en cuenta que el modelo interregional tratado considera la producción de los mismos productos en las distintas regiones, admitiendo que la técnica de producción de cada producto j (estructura del vector de coeficientes de «inputs» intermedios y primarios) es distinta en cada región (véase expresión [1]).

[27] Lo que implica que los coeficientes normalizados y no normalizados son idénticos en la sectorización vertical.

propiedades que las I, D, I_i y D_i estudiadas anteriormente, y a ellas nos remitimos. Lo mismo ocurre con los cuantificadores $({}_jGI(\alpha;\ \beta)$ y ${}_jGD(\alpha/\beta))$ de estas relaciones. No obstante, a partir de [8], [9], y [29] se llega a la siguiente expresión:

$$ {}_jGI(\alpha;\ \beta) = [\text{menor}]\{{}^{\beta}_{j}ka^{\alpha},\ {}^{\alpha}_{j}ka^{\beta}\},\ \text{siendo } 0 < {}_jGI(\alpha;\ \beta) \leqslant 1 \qquad [30] $$

donde ${}_jGI(\alpha;\ \beta) = {}_jGI(\beta;\ \alpha)$ por la simétrica de ${}_jI$. A partir de [10], [11], y [29] resulta que:

$$ \begin{array}{c} {}_jGD(\alpha/\beta) = {}^{\beta}_{j}ka^{\alpha} - {}^{\alpha}_{j}ka^{\beta}; \\ \text{con } {}^{\beta}_{j}ka^{\alpha} > {}^{\alpha}_{j}ka^{\beta} \ \Rightarrow\ 0 < {}_jGD(\alpha/\beta) \leqslant 1 \end{array} \qquad [31] $$

para $\forall\ \alpha \neq \beta$ por la no reflexiva de ${}_jD$, y por la antisimétrica de ${}_jD$ tendremos que si $\alpha_j D\beta$ entonces $\beta_j \not{D}\alpha$, la recíproca no siendo cierta por la no completa.

La desagregación de cada matriz ${}_jMKA$ en sus sumandos de interdependencia y de dominación, ${}_jMKA = {}_jMGI + {}_jMGD = {}_jMGIA + {}_jMGIE + {}_jMGD$, que se realiza según las pautas establecidas en 2.5, permite, por un lado, analizar el papel suministrador de cada región a la técnica de producción de cada sector j de cada región, y por otro lado, conduce a las ecuaciones de síntesis:

$$ \overline{{}_jGI} + \overline{{}_jGD} = \overline{{}_jGIA} + \overline{{}_jGIE} + \overline{{}_jGD} = 1 \quad ; \quad \forall\, j = 1, \ldots, r \qquad [32] $$

que evalúan los pesos relativos de los grados medios de interdependencia, en sus dos componentes, y de dominación interregional. La influencia entre regiones distintas por este concepto, se cuantifica por: $\overline{{}_jGIE}\ \overline{{}_jGD} = 1 - \overline{{}_jGIA}$.

2.8. *Influencias interregionales en términos de requerimientos intermedios*

El tratamiento de producción intermedia como verdadero vector de variables dependientes, procede del estudio de Rey y Tilanus (1963), y de la revisión de Theil (1966), para un sistema económico (Holanda en 1948 y 1957) sin partición regional[28]. Trasladar este tratamiento a un sistema multirregional no presenta dificultades. Una vez conocidos la matriz estructural $A^{(r)}$ extendida a $nr \times nr$ y los vectores $D^{(r)}$ y $X^{(r)}$, extendidos a nr, de demanda final y producción, el cálculo del vector $Z^{(r)}$ de producción intermedia, en dimensión nr, es inmediato a partir de [3]:

$$ Z^{(r)} = X^{(r)} - D^{(r)} = ((I - A^{(r)})^{-1} - I)D^{(r)} = (B^{(r)} - I)D^{(r)} \qquad [33] $$

cuyos subvectores de producción intermedia nacional de las regiones, Z^{α}, respetan la condición de complementaridad $(\sum_{\alpha} Z^{\alpha} = Z)$ en dimensión n, dada la

[28] Para España ver los trabajos de la Fundación del I.N.I., entre ellos Martin, Mones, R. Romero (1981).

complementaridad de los vectores regionales X^α y D^β en sus homónimos nacionales X y D. De [33] resulta que el vector Z^α de $R - \alpha$ es:

$$Z^\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} B^{\alpha\beta} \cdot D^\beta + (B^{\alpha\alpha} - I) \cdot D^\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} {}^\beta Z^\alpha + {}^\alpha Z^\alpha \qquad [34]$$

de [4] y [34] se obtiene que: ${}^\beta X^\alpha = {}^\beta Z^\alpha$ con $\beta \neq \alpha$, es decir, que la producción inducida entre regiones distintas es exclusivamente producción intermedia; ${}^\alpha Z^\alpha = {}^\alpha X^\alpha - D^\alpha$, es decir, que la producción intermedia que debe realizar una región a instancias de sí misma es igual a su producción total en estas condiciones menos la produtcción final nacional de la región.

Definidos [33] y [34] la obtención de los requerimientos intermedios nacionales de cada $R - \beta$ es inmediata a partir de:

$$^\beta Z = \sum_{\alpha \neq \beta} {}^\beta Z^\alpha + {}^\beta Z^\beta = [\Sigma\, B^{\alpha\beta} + (B^{\beta\beta} - I)]D^\beta = (B^\beta - I)D^\beta \qquad [35]$$

de donde resultan los siguientes coeficientes de aprovisionamiento a los requerimientos intermedios regionales, por aplicación de [11] a [35]:

$$\begin{gathered} {}^\beta kaz^\alpha = \frac{{}^\beta Z_c^\alpha}{{}^\beta Z_c} = \frac{{}^\beta X_c^\alpha}{{}^\beta X_c - D_c^\beta}; \\ \text{con } 0 \leqslant {}^\beta kaz^\alpha \leqslant 1, \text{ para todo } \beta \neq \alpha \end{gathered} \qquad [36]$$

la comparación entre [6] y [36] muestra que el coeficiente de aprovisionamiento a los requerimientos intermedios regionales entre regiones distintas es mayor que su equivalente para los requerimientos totales: ${}^\beta kaz^\alpha > {}^\beta ka^\alpha$ para todo $\beta \neq \alpha$.

Esta relación es de sentido opuesto para los coeficientes de autoaprovisionamiento de los requerimientos intermedios y totales de cada región:

$$\begin{gathered} {}^\beta \mathrm{kaz}^\beta = \frac{{}^\beta Z_c^\beta}{{}^\beta Z_c} = \frac{{}^\beta X_c^\beta - D_c^\beta}{{}^\beta X_c - D_c^\beta}; \\ \text{con } 0 \leqslant {}^\beta kaz^\beta \leqslant 1, \text{ para todo } \beta = 1, \dots, r \end{gathered} \qquad [37]$$

resultando de [6] y [37]: ${}^\beta kaz^\beta < {}^\beta ka^\beta$ para todo β.

A su vez, por [36] y [37] se tiene que los kaz adoptan la forma de una función de densidad: $\sum_\alpha {}^\beta kaz^\alpha = 1$ para todo $\beta = 1, \dots, r$, por tanto, la ordenación matricial de los ${}^\beta kaz^\alpha$ define una nueva matriz $MKAZ$ de idénticas características que la MKA descrita en [7]:

$$MKAZ = |{}^\beta kaz^\alpha| \qquad [38]$$

que contiene las relaciones binarias I_z y D_z, de interdependencia y de dominación en términos de requerimientos intermedios, de idénticas características que I y D estudiadas en 2.4. Aplicando miméticamente a $MKAZ$ todos los desarrollos generados a partir de la MKA, se obtienen: a partir de [13] y [14]:

$$MKAZ = MGIZ + MGDZ = MGIAZ + MGIEZ + MGDZ \qquad [39]$$

de donde resultan las relaciones equivalentes de [20]-[22]:

$$\overline{GIZ} + \overline{GDZ} = 1$$

$$\overline{GIAZ} + \overline{GIEZ} + \overline{GDZ} = 1$$

$$\overline{GIEZ} + \overline{GDZ} = 1 - \overline{GIAZ}$$

que representan exactamente lo mismo, para los requerimientos intermedios, que sus homólogas para los requerimientos totales. No obstante cabe señalar que a partir de [6], [36] y [37], resultan:

$$\overline{GIAZ} < \overline{GIA}$$

$$\overline{GIEZ} > \overline{GIE}$$

$$\overline{GDZ} > \overline{GD}$$

$$\overline{GIEZ} + \overline{GDZ} > \overline{GIE} + \overline{GD}$$

cuyo significado es: el grado medio de autoaprovisionamiento en requerimientos intermedios del sistema es menor que su homólogo en requerimientos totales; el grado medio de interdependencia entre regiones distintas es mayor para los requerimientos intermedios que para los totales; el grado medio de dominación en base a los requerimientos intermedios es superior al correspondiente a los requerimientos totales; y finalmente, que las influencias totales entre regiones distintas son mayores cuando se evalúan sobre los requerimientos intermedios que cuando se miden sobre los requerimientos totales.

La sectorización de las influencias en términos de requerimientos intermedios seguirá un desarrollo idéntico del expuesto en 2.8, llegándose en ambas desagregaciones, horizontal y vertical, al mismo tipo de relaciones de influencias en requerimientos intermedios y totales que las que se acaban de exponer, por lo que no procede su desarrollo formal.

3. Influencias interregionales: caso de estabilidad en los empleos

3.1. *Esbozo*

El análisis «input» «output» en base a coeficientes fijos de «output», que procede de Ghosh (1958), ha sido formalizado con rigor por Augustinovics (1968) para un sistema nacional sin partición regional[29]. Trasladar este método al caso multirregional no presenta dificultades mayores, cuando la información disponible es la descrita en 2.1[30].

Sea $R^{(r)}$ el vector nacional de recursos totales movilizados, extendido a nr por yuxtaposición de los r vectores R^{β} de recursos movilizados por cada $R - \beta$. Por definición contable del sistema «input» «output» se sabe que $X = R$, tanto al nivel nacional extendido ($X^{(r)} = R^{(r)}$) como para cada $R - \beta$ particular ($X^{\beta} = R^{\beta}$). La complementaridad de los R^{β} ($\sum_{\beta} R^{\beta} = R$) es, por tanto evidente. La matriz $P^{(r)}$ de coeficientes de «output» o de empleos de la producción de cada sector i de cada $R - \alpha$ ($p_{ij}^{\alpha\beta} = X_{ij}^{\alpha\beta}/X_i^{\alpha}$) se obtiene de la siguiente forma:

$$P^{(r)} = \hat{X}^{(r)-1} \cdot F^{(r)} = \hat{X}^{(r)-1} \cdot A^{(r)} \cdot \hat{X}^{(r)} \qquad [40]$$

[29] Algunas aplicaciones de este modelo son: la de Jones (1976) que define los «forward linkages» en términos de la inversa de $I\text{-}P$; las de Duru-Mougeot-Auray (1977-1982) que combinan los dos modelos para definir las influencias en términos de «elasticidades», a partir de las relaciones fijas entre A y P: ($p = \hat{X}^{-1}AX$) y entre $B = (I\text{-}A)^{-1}$ y $W = (I\text{-}P)^{-1}$: ($W = \hat{X}^{-1}B\hat{X}$).

[30] La formalización del modelo multirregional con información limitada a la exigida por el modelo de Chenery (1953) y Moses (1955) propuesta por Polenske (1966) en base una combinación de coeficientes de «inputs» intrarregionales y de «output» interregionales, mediante unos coeficientes únicos (medios) de exportaciones interregionales (matrices diagonales para cada par de regiones), es una formalización inconsistente, según demostración teórica de Richardson (1972) y algébrica de Bon (1984).
El modelo aquí propuesto resulta consistente en la medida en que supone conocida, en su totalidad, la matriz de flujos $F^{(r)}$ intersectoriales e interregionales. Una demostración dela consistencia simultánea de los modelos basados en una matriz estructural de coeficientes de «input» ($A^{(r)}$) y en una matriz de coeficientes de «output» ($P^{(r)}$) es:

$$A^{(r)} = F^{(r)}\hat{X}^{(r)-1} \quad ; \quad P^{(r)} = \hat{X}^{(r)-1}F^{(r)}; \quad \text{luego} \quad A^{(r)}\hat{X}^{(r)} = \hat{X}^{(r)}P^{(r)}$$

$$B^{(r)} = (I - A^{(r)})^{-1} = (I - F^{(r)}\hat{X}^{(r)-1})^{-1} = ((\hat{X}^{(r)} - F^{(r)})\hat{X}^{(r)-1})^{-1},$$

de donde resulta finalmente, en virtud de la propiedad de que la inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas en orden opuesto: $B^{(r)} = \hat{X}^{(r)}(\hat{X}^{(r)} - F^{(r)})^{-1}$, y por tanto: $(\hat{X}^{(r)} - F^{(r)})^{-1} = \hat{X}^{(r)-1}B^{(r)}$. Del lado de la matriz de coeficientes de «output» las cosas pasan de la siguiente manera:

$$W^{(r)} = (I - P^{(r)})^{-1} = (I - \hat{X}^{(r)-1}F^{(r)})^{-1} = (\hat{X}^{(r)-1}(X^{(r)} - F^{(r)}))^{-1},$$

de donde en virtud de la misma propiedad de las matrices inversas tendremos: $W^{(r)} = (\hat{X}^{(r)} - F^{(r)})^{-1}\hat{X}^{(r)}$, y por tanto: $(\hat{X}^{(r)} - F^{(r)})^{-1} = W^{(r)}\hat{X}^{(r)-1}$. Resultando finalmente las identidades buscadas: $W^{(r)}\hat{X}^{(r)-1} = \hat{X}^{(r)-1}B^{(r)}$, o su equivalente: $B^{(r)}\hat{X}^{(r)} = \hat{X}^{(r)}W^{(r)}$. Por tanto, si el sistema es formalmente consistente en términos de coeficientes de «inputs» esto es si $B^{(r)}$ es semidefinida positiva, resulta que $W^{(r)}$ es necesariamente semidefinida positiva ya que $\hat{X}^{(r)}$ lo es por definición, y por tanto, el sistema es formalmente consistente en términos de coeficientes de «output».

La determinación simultánea del sistema por los lados de los «inputs» y de los «outputs» es una consecuencia de que $(\hat{X}^{(r)} - F^{(r)})$ es no singular con radio espectral inferior a la unidad, y por tanto, los menores principales de $(I - A^{(r)})$ y de $(I - P^{(r)})$ son simultáneamente positivos (condiciones Hawkins-Simon) a la vez que las normas uno de líneas y columnas de $A^{(r)}$ y $P^{(r)}$ son menores que uno (condiciones de Solow).

donde la segunda igualdad recoge la conocida relación: $p_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ij}^{\alpha\beta} \cdot X_j^{\beta}/X_i^{\alpha}$, entre los coeficientes de «input» y de «output», llevada a un contexto multirregional. Denominando $d_i^{\alpha} = D_i^{\alpha}/X_i^{\alpha}$ a los coeficientes de salida de la estructura productiva o de empleos en demanda final, las condiciones de esta nueva formulación se expresan de la siguiente manera:

a) estabilidad en empleos o rigidez en coeficientes de «output»:

$$\sum_{\beta} \sum_{j} p_{ij}^{\alpha\beta} + d_i^{\alpha} = 1; \quad \text{con todo } p_{ij}^{\alpha\beta} \text{ y } d_i^{\alpha} \text{ constante no negativo} \qquad [41]$$

b) equilibrio ex-post por el lado de los recursos movilizados, con la hipótesis subyacente de variabilidad en la estructura productiva de cada sector j de cada $R - \beta$: $R^{(r)'} = V^{(r)'}(I - P^{(r)})^{-1} = V^{(r)'}W^{(r)}$, donde: $W^{(r)} = (I - P^{(r)})^{-1}$ o su equivalente, en virtud de la propiedad $(AB)' = B'A'$ del cálculo matricial:

$$R^{(r)} = (I - P^{(r)'})^{-1} \cdot V^{(r)} = W^{(r)'} \cdot V^{(r)} \qquad [42]$$

lo que particularizado al nivel del vector de recursos movilizados por cada $R - \beta$ significa que:

$$R^{\beta} = \sum_{\alpha} W^{\alpha\beta'} \cdot V^{\alpha} = \sum_{\alpha} {}^{\alpha}R^{\beta} \qquad [43]$$

donde ${}^{\alpha}R^{\beta} = W^{\alpha\beta'} \cdot V^{\alpha}$ es el vector que recoge los recursos movilizados por la $R - \beta$ a instancias del valor añadido de la $R - \alpha$ ($\forall\ \alpha, \beta = 1, \dots, r$). Siendo $W^{(r)}$ la matriz de $nr \times nr$ de multiplicación productiva de los «inputs» primarios, cada una de las r^2 submatrices $W^{\alpha\beta}$ recoge el acumulado del proceso de incorporación (compras) de recursos totales de la $R - \beta$ con el fin de asegurar, en el contexto nacional, la obtención de un vector unitario de valor añadido de la $R - \alpha$.

Siguiendo un esquema afín al utilizado en 2.1 y 2.2, se observa que los recursos R^{β} movilizados por la $R - \beta$ dependen de los valores añadidos de todas las regiones de la partición $(R^{\beta} = R(V^1, \dots, V^r))$. Esta dependencia impide, por un lado, el tratamiento separado de los vectores de recursos regionales y, por otro lado, implica inestabilidad en los coeficientes que evalúan los orígenes regionales de los recursos movilizados por cada región[31]. Para superar estas dos dificultades se

[31] Estos coeficientes responderían a la siguiente expresión:

$$ {}^{\alpha}ko^{\beta} = \frac{{}^{\alpha}R_c^{\beta}}{R_c^{\beta}} = \frac{U' W^{\alpha\beta'} V^{\alpha}}{U'(\sum_{\alpha} W^{\alpha\beta'} V^{\alpha})} = k(V^1, \dots, V^r)$$

que al depender de los vectores de «inputs» primarios del conjunto de las regiones se ven afectados por las dimensiones absolutas y relativas de éstas, perdiendo de esta forma, la estabilidad estructural que tal tipo de independencia confiere a los ka estudiados en 2.3.

propone una nueva lectura de [42], en términos de la producción nacional distribuida (${}^{\alpha}R$) a instancias del valor añadido V^{α} de la $R - \alpha$, y de sus destinos hacia las distintas $R - \beta$ de la partición (${}^{\alpha}R^{\beta}$):

$$ {}^{\alpha}R = \sum_{\beta} {}^{\alpha}R^{\beta} = \sum_{\alpha} W^{\alpha\beta'} \cdot V^{\alpha} = W^{\alpha'} \cdot V^{\alpha} \qquad [44] $$

de donde resulta la siguiente condición de complementaridad:

$$ R = \sum_{\alpha} {}^{\alpha}R = \sum_{\beta} R^{\beta}, \text{ con } R^{\beta} \neq {}^{\beta}R, \text{ para todo } \beta = 1, \ldots, r $$

La similitud entre [5] y [44] hace que sean aplicables ahora los mismos esquemas de análisis practicados anteriormente. Por un lado, aparece un nuevo conjunto de matrices, W^{α} con $\alpha = 1, \ldots, r$, que, debido a que recogen la producción nacional a distribuir para asegurar un vector unitario de valor añadido de cada $R - \alpha$, se denominarán matrices de «multiplicación productiva nacional del valor añadido regional». Por otro lado, la segunda igualdad de [44] indica que cada ${}^{\alpha}R$ depende únicamente del vector V^{α} de la propia región, lo que autoriza a su tratamiento por separado y al establecimiento de los coeficientes (${}^{\alpha}kd^{\beta}$) para el estudio de sus destinos por regiones $R - \beta$ compradoras:

$$ {}^{\alpha}kd^{\beta} = \frac{{}^{\alpha}R_c^{\beta}}{{}^{\alpha}R_c} = \frac{U' W^{\alpha\beta'} V^{\alpha}}{U' W^{\alpha'} V^{\alpha}}; \text{ con } \sum_{\beta} {}^{\alpha}R^{\beta} = {}^{\alpha}R \qquad [45] $$

Igual que los ${}^{\beta}ka^{\alpha}$ estudiados en 2.3, los ${}^{\alpha}kd^{\beta}$ presentan las características de una función de densidad:

$$ \sum_{\beta} {}^{\alpha}kd^{\beta} = 1; \text{ con } 0 \leqslant {}^{\alpha}kd^{\beta} \leqslant 1, \quad \forall\, \alpha, \beta = 1, \ldots, r $$

La expresión [45] muestra, igual que su equivalente [6] en el modelo de coeficientes de «input» fijos, que los ${}^{\alpha}kd^{\beta}$ sólo dependen de la orientación del radio vector V^{α} cuya movilización de producción nacional está siendo estudiada. Dada esta circunstancia se constata que los ${}^{\alpha}kd^{\beta}$ también son independientes de la dimensión absoluta o relativa de las regiones $R - \alpha$ y $R - \beta$ del par considerado.

La ordenación matricial de los ${}^{\alpha}kd^{\beta}$, permite definir la matriz MKD de coeficientes de destinos de dimensión $r \times r$:

$$ MKD = |{}^{\alpha}kd^{\beta}| \qquad [46] $$

cuyas características son idénticas a las descritas para la matriz MKA definida en 2.3. Por tanto, en la medida en que el procedimiento descrito en el apartado 2 sea válido, estamos autorizados a su aplicación mimética a la nueva matriz MKD. Ello permitirá desarrollar unas nuevas relaciones binarias I^* y D^* en términos de los coeficientes de destinos ${}^{\alpha}kd^{\beta}$, que conducirán a la descomposición de la MKD

en las matrices MGI^* y MGD^* de grados de interdependencia y de dominación contenidos en los ${}^{\alpha}kd^{\beta}$, equivalentes a las MGI y MGD analizadas en 2.5. A su vez la MGI^* admitirá dos submatrices de $MGIA^*$ o de autoconsumo de la producción nacional movilizada por cada región, y la $MGIE^*$ que recoge las interdependencias por destinos entre regiones distintas. Determinadas estas matrices se calcularán los grados medios $\overline{GD^*}$ de dominación y $\overline{GI^*}$ de interdependencia, con sus dos sumandos, el autoconsumo $\overline{GIA^*}$ y por interdependencia entre regiones distintas $\overline{GIE^*}$. Resultando, al final del proceso las ecuaciones de síntesis:

$$\overline{GI^*} + \overline{GD^*} = 1 \qquad [47]$$

$$\overline{GIA^*} + \overline{GIE^*} + \overline{GD^*} = 1 \qquad [48]$$

$$\overline{GIE^*} + \overline{GD^*} = 1 - \overline{GIA^*} \qquad [49]$$

que dada su similitud con las expresiones [20]-[22] a ellas nos remitimos omitiendo todo nuevo comentario.

Es evidente que el proceso de sectorización de la MKD es idéntico del expuesto para la MKA en 2.6, y por tanto, a él nos remitimos. Lo mismo cabe decirse del análisis de las influencias en términos de recursos intermedios por la vía de los coeficientes de destino ${}^{\alpha}kdz^{\beta}$ respecto de los ${}^{\beta}kaz^{\alpha}$ expuestos en 2.7, párrafo al que nos remitimos.

3.2. *Diferente contenido de ambos enfoques de estabilidad*

Según se ha demostrado (nota 30) la consistencia formal del modelo de estabilidad por columnas, implica necesariamente la consistencia por líneas del modelo multirregional. Ello se debe a que las matrices, y por tanto, sus elementos, de las formas reducidas ($B^{(r)}$, $W^{(r)}$) de ambos enfoques se relacionan exactamente en los mismos términos que las matrices ($A^{(r)}$, $P^{(r)}$) correspondientes a las formas estructurales. Sean:

$$A^{(r)}\hat{X}^{(r)} \equiv \hat{X}^{(r)}P^{(r)} \quad \Rightarrow \quad B^{(r)}\hat{X}^{(r)} = \hat{X}^{(r)}W^{(r)} \qquad [50]$$

o su equivalente para todos $i, j = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$:

$$a_{ij}^{\alpha\beta}X_j^{\beta} \equiv p_{ij}^{\alpha\beta}X_i^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad b_{ij}^{\alpha\beta}X_j^{\beta} = w_{ij}^{\alpha\beta}X_i^{\alpha} \qquad [51]$$

Trasladando al dominio multirregional el análisis de Duru *et al.* (1977-1982), estas identidades y sus implicaciones permiten evaluar simultáneamente las influencias absolutas y relativas, directas y totales entre pares de sectores (i, j) de dos regiones $(R - \alpha,\ R - \beta)$ cualquiera. Sea, por ejemplo, el caso de las influencias totales, entonces las expresiones incrementales de las formas reducidas [3] y [42] evalúan, respectivamente, el efecto producido en cada sector i de cada $R - \alpha$ por las variaciones de la demanda final nacional (ΔD_j^{β}) y del valor añadido (ΔV_j^{β}) del sector j de la $R - \beta$. Denominando respectivamente, ${}^{\beta}_{j}X^{\alpha}_{i}$ y ${}^{\beta}_{j}R^{\alpha}_{i}$ a la producción distribuida y a los recursos movilizados por el sector i de la $R - \alpha$ a instancias del sector j de la $R - \beta$, y teniendo en cuenta la identidad contable $X^{\alpha}_{i} \equiv R^{\alpha}_{i}$, de [3] y [51] resultan:

$$b^{\alpha\beta}_{ij} = \frac{\Delta^{\beta}_{j}X^{\alpha}_{i}}{\Delta D^{\beta}_{j}} \quad \text{y} \quad w^{\alpha\beta}_{ij} = \frac{\Delta^{\beta}_{j}X^{\alpha}_{i}/X^{\alpha}_{i}}{\Delta D^{\beta}_{j}/X^{\beta}_{j}} \qquad [52]$$

mientras que de [42] y [51] se obtienen:

$$w^{\beta\alpha}_{ji} = \frac{\Delta^{\beta}_{j}R^{\alpha}_{i}}{\Delta V_{j}} \quad \text{y} \quad b^{\beta\alpha}_{ji} = \frac{\Delta^{\beta}_{j}R^{\alpha}_{i}/R^{\alpha}_{i}}{\Delta V^{\beta}_{j}/R^{\beta}_{j}} \qquad [53]$$

expresiones que indican que, en caso de estabilidad por columnas, la matriz B recoge las influencias totales, mientras que las relativas o «elasticidades» se expresan en los coeficientes de W, y viceversa en caso de estabilidad por filas. Atendiendo a las características de ambos enfoques, esto significa que las influencias totales son constantes, mientras que las «elasticidades» son variables.

Duru *et al.*, en diversas aplicaciones a países de Europa, han demostrado el gran poder analítico de esta aproximación a las influencias. Sin embargo, según se observa en las relaciones [50]-[53] las diferencias entre ambos enfoques no se manifiestan con claridad. A este respecto la intención de este artículo es, teniendo en cuenta las mayores posibilidades del modelo multirregional, establecer con la mayor precisión posible tales diferencias. A tal efecto el procedimiento elaborado parte de la redefinición de las formas reducidas y hace operativos dos nuevos conjuntos de vectores: el de los requerimientos nacionales (${}^{\beta}X$) de cada $R - \beta$ del enfoque por columnas, y el de la producción nacional distribuida (${}^{\alpha}R$) a instancias de cada $R - \alpha$. Los ${}^{\beta}X$ se estudian en términos de las regiones suministradoras, es decir el análisis se sitúa en el contexto de las regiones para las que se produce en lugar de en el de las regiones que producen. En el enfoque por filas vuelve a presentarse esta substitución del papel activo por el pasivo de la región, representado esta vez por el conjunto de vectores ${}^{\alpha}R$ que es estudiado por regiones de destino. Las expresiones formales de estos conjuntos de vectores según [5] y [44] son:

$${}^{\beta}X = \sum_{\alpha} B^{\alpha\beta}D^{\beta} = B^{\beta}D^{\beta} \quad ; \quad {}^{\alpha}R = \sum_{\beta} W^{\alpha\beta\prime}V^{\alpha} = W^{\alpha\prime}V^{\alpha}, \text{ con } X^{\alpha} = R^{\alpha}$$

de [50] resulta que: $\hat{X}^{\alpha}W^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta}\hat{X}^{\beta}$, de donde se obtienen las siguientes expresiones de B^{β} y de W^{α}:

$$B^{\beta} = \sum_{\alpha} B^{\alpha\beta} = \left[\sum_{\alpha} \hat{X}^{\alpha}W^{\alpha\beta}\right][\hat{X}^{\beta}]^{-1} \quad ;$$

$$W^{\alpha} = \sum_{\beta} W^{\alpha\beta} = [\hat{X}^{\alpha}]^{-1}\left[\sum_{\beta} B^{\alpha\beta}\hat{X}^{\beta}\right]$$

lo que conduce a la desigualdad final:

$$\hat{X}^{\alpha}W^{\alpha} \neq B^{\alpha}\hat{X}^{\alpha} \quad [54]$$

La desigualdad [54] asegura la independencia formal de las matrices B^{α} y W^{α} y de esta forma queda confirmado el distinto contenido de ambos enfoques.

En resumen el procedimiento aquí desarrollado, y a diferencia de otros casos citados, es consistente y distinto en sus dos enfoques de estabilidad por filas y por columnas. Si además se tiene en cuenta que, tanto al nivel regional como sectorial en sus dos vertientes, las influencias medidas en términos de relaciones binarias son independientes de la dimensión de las regiones (o de los sectores), y que en cada caso se llega a una perfecta ponderación de los grados de interdependencia y de dominación, se puede concluir que este procedimiento presenta todas las características de un instrumento de análisis y medición para su utilización en política económica regional.

Referencias

Arango, J. (1979): Multiplicadores y «feedbacks» en los modelos input-output, *Investigaciones Económicas, núm. 9.*

Arango, J., Polledo, J. y Piñera, P. (1982): *Estudio económico sobre la actividad industrial asturiana*, Ed. SADEI.

Augustinovics, M. (1968, Ed. 1970): «Methods of international and intertemporal comparison of structure», en *Contributions to Input-Output Analysys*, Carter, A. P., Brody, A. Ed. North Holland.

Aujac, H. (1960): «La hiérarchie des industries dans un tableau des échanges interindustriels», *Revue Economique*, vol. 2.

Auray, J. P. (1982): «Contribution à l'étude des structures pauvres» Thèse Université Lyon-I, mimeo.

Batten, D. (1982): «The interregional linkages between national and regional input-output models», *International Regional Science Review*, vol. 7, *núm. 1.*

Bon, R. (1984): «Comparative stability analysis of multirregional input-output models: Column, Row, and Leontief-Strout gravity coefficient models», *Quarterly Journal of Economics*, vol. 99, *núm. 4.*

Brejon de Lavergnée, N. (1984): «Un réexamen de la dominance économique: Théorie et application au cas du Maroc», *Revue d'Economie Appliquée, 94 ème année, núm. 1.*

Cañada, J., Barreiro, A. (1982): «Aplicación del análisis "input"-"output" a la determinación de los efectos de dependencia interregional: caso Andalucía-Resto de España», *Actas VIIIª Reunión A.E.C.R.*, Bilbao.

Chenery, H. (1954): «Inter-regional and International Input-Output analysis» en *The Structural Interdependence of Economy*, Wiley N. Y.

Chenery, H., Watanabe, T. (1958): «International Comparisons of the Structure of production», *Econometrica*, vol. 26, *núm. 4.*

Duru, G., Mougeot, M. y Auray, J. P. (1977): *La structure productive française*, Economica, París.

Duru, G., Mougeot, M. y Auray, J. P. (1982): *Structures productives européennes*, C.N.R.S., Centre Regional de Publication Lyon.

Eskelinen, H. (1981): «Core and periphery in a three-region input-output framework», *XXI European Congress-Regional Science Association*, Barcelona.

Fanjul, O. y Segura, J. (1977): *Dependencia productiva y exterior de la economía española 1962-1970*, Fundación del I.N.I., serie E, núm. 10.

Ghosh, A. (1958): «Input-output approach in an allocation system», *Economica*.
Guiasu, S. y Vermont-Desroches, B. (1982): «The principle of minium interdependence in urban and regional modeling», *Université du Quebec à Trois Rivières*.
Guillen, W. y Guccione, A. (1980): «Interregional feedebacks in input-output models: some formal results», *Journal of Regional Science*, vol. 20, *núm. 4*.
Hawkins, D. y Simon, A. (1949): «Note: some conditions of macroeconomic stability», *Econometrica*, págs. 245-248.
Hirschman, A. (1958): *The strategy of economic development*, chap. 6, New Haven, Yale, U. P. (trad. esp. F. C. E., 1961).
Isard, W. (1960): *Methods of regional analysis: an introduction to regional science*, ed. M. I. T. (trad. esp. Ariel, 1971).
Jones, L. (1976): «The measurement of hirschmanian linkages», *Quarterly Journal of Economics*, vol. 90, *núm. 2*.
Lantner, R. (1972): «L'analyse de la dominance économique», *Revue d'Economie Politique*, *núm. 2*.
Lantner, R. (1974): *Théorie de la dominance économique*, Dunod, París.
Laumas, P. (1976): «The weighting problem in testing the lincage hypothesis», *Quarterly Journal of Economics*, vol. 90, *núm. 2*.
Leontief, W. (1963): «La estructura del desarrollo» en *Análisis Económico input-output*, Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1970.
Leontief, W. y Strout, A. (1963): «Multirregional input-output analysis» en *Structural interdependence and economic development*, T. Barna Ed., Nueva York, st. Martin Press (trad. esp. Gustavo Gili, 1970).
Leontief (1966): «Input-output analysis» en *Input-output Economics*, Nueva York, Oxford U. P. (trad. esp. Ed. Gustavo Gili, 1970).
Martin, C., Mones, M. A. y R. Romero, L. (1981): *Comparación de estructuras productivas y competitividad España-C. E. E.* Fundación del I. N. I. Serie E, núm. 17.
Miller, R. (1969): «Interregional feedbacks in input-output models: some experimental results», *Western Journal Economics*, vol. 7.
Miyazawa, K. (1966): «Internal and external matrix multiplies in the input-output models», *Hitosubashi Journal of Economics*, junio.
Morillas, A. (1983): *La teoría de grafos en el análisis input-output*, Ed. Universidad de Málaga.
Moses, L. N. (1955): «The stability of interregional trading patterns and input-output analysis», *American Economic Review*, vol. 45.
Perroux, F. (1948): «Esquisse d'une théorie de l'économie dominante», *Economie Appliquée*, vol. 2-3.
Polenske, K. (1972): «The implementation of a multirregional input-output model of the United States» en *Input-output Techniques*, Brody and Carter, E. North Holland, Amsterdam y Londres.
Polenske, K. (1980): *The U. S. multirregional input-output accounts and model*, Lexinton, MA, and Toronto: Lexinton Books. Ambos trabajos de Polenske como aproximación a su tesis de 1966 en Harvard University.
Rasmausen, P. N. (1956): *Studies in intersectoral relations* Amsterdam North Holland, Trad. esp. Aguilar, 1963.
Rey, G. y Tilanus, C. B. (1963): «Input-output forecast for the Netherlands, 1949-1958», *Econometrica*, vol. 31.
Richardson, H. (1972): *Input-output and regional economics*, Weidenfeld and Nocolson, Londres.
Solow, R. (1952): «On the structure of linear models», *Econometrica*, vol. 20, *núm. 1*.
Theil, H. (1966): *Applied Economic Forecasting*, North Holland, Amsterdam.
Watanabe, S. (1969): «Knowing and guessing», Wiley, Nueva York.
Yan, C. S. y Ames, E. (1965): «Economic Interrelatdness», *The Review of Economic Studies*, vol. 32.
Yotopoulos, P. y Nugent, J. (1973): «A balanced-growth version of the linkage hypothesis», *Quarterly Journal of Economics*, vol. 87, *núm. 2*.
Yotopoulos, P. y Nugent, J. (1976): «In defense of a test of the linkage hypothesis», *Quarterly Journal of Economics*, vol. 90, *núm. 2*.

Abstract

Using an Isard's interregional input-output model, and analysing the interregional influences by means of binary relations it is possible to measure the degrees of interdependence and domination between pairs of regions and between each region and the nation itself, according to the following characteristics: *a*) The degrees' structural content are independent of regional sizes; *b*) They have defined boundaries since they are non-negative and their sum is equal to one; *c*) They enable to measure the influences of demand and supply sides, with the supply side being stable in the inputs and the demand being stable in the outputs; *d*) Their sectorization permits the evaluation of the influences between homonymous sectors at different regions.

Recepción del original, mayo de 1985.
Versión final, febrero de 1986.