Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XIV, n.º 1 (1990), págs. 85-111

CONTROL OPTIMO DE SISTEMAS LINEALES CON EXPECTATIVAS RACIONALES

Emilio CERDA TENA*

Universidad Complutense de Madrid

En este trabajo se considera el problema de control óptimo de sistemas lineales con expectativas racionales, cuando la función objetivo es cuadrática y el horizonte temporal es finito. No se cumple la hipótesis de causalidad, por lo que no son directamente aplicables las técnicas habituales de teoría de control. Se presenta un método, que se apoya en la programación dinámica, que resuelve el problema. Se ilustra el método con dos ejemplos económicos.

1. Introducción

El control óptimo ha sido utilizado con éxito en ingeniería y en economía de la empresa: así, ha permitido ganancias importantes de eficiencia en la planificación de la producción y en el control de inventarios. Ha sido el instrumento básico para describir el comportamiento de individuos y empresas, cuando la actividad económica se desarrolla a través del tiempo. También se ha utilizado en macroeconomía —Kendrick (1976), analiza alrededor de noventa aplicaciones— aunque el éxito es más discutible. Hay gran cantidad de trabajos sobre el control óptimo aplicado a sistemas macroeconómicos: por ejemplo, podemos citar los libros de Aoki (1976), Chow (1975) y (1981), B. Friedman (1975), Pindyck (1973), Pitchford y Turnovsky (1977), Kendrick (1981) y (1988), Murata (1982) y Sargent (1987).

Kydland y Prescott (1977) tratan la aplicabilidad de métodos de control óptimo a sistemas macroeconómicos. Demuestran que para el problema:

$$\max_{x_1, x_2} S(y_1, y_2, x_1, x_2)$$

$$\text{sujeto a: } y_1 = y_1(x_1, x_2)$$

$$y_2 = y_2(y_1, x_1, x_2),$$

en donde y es la variable de estado; x es la variable de control, el plan óptimo que empieza en $t = 2$ y toma lo anterior como dado no es una continuación del plan óptimo que empieza en $t = 1$, y toma lo anterior como dado. No es, por tanto, aplicable el principio de optimalidad de Bellman. En general, las

* Agradezco a Alfonso Novales su importante ayuda en la realización de los ejemplos que aparecen en el trabajo, siendo exclusivamente mía la responsabilidad de los errores que puedan aparecer.

técnicas de Teoría de Control no son aplicables a problemas de este tipo por no cumplirse la hipótesis de causalidad.

En los trabajos posteriores de Aoki-Canzoneri (1979), Chow (1980), Driffill (1981) y Buiter (1983) se estudia la aplicabilidad de la Teoría de Control a sistemas con expectativas racionales: en unos casos se pueden aplicar las técnicas habituales de control óptimo, tras expresar el sistema en otra forma equivalente; en otros casos, se buscan variantes de las técnicas habituales para resolver el problema. Este trabajo pretende ir en la línea de estos últimos.

En este artículo se aborda el problema de control óptimo de un sistema lineal con expectativas racionales y función objetivo cuadrática, con horizonte temporal finito. En el apartado 2 se enuncia el problema y se parte de la solución que propone Chow para unas condiciones particulares, la cual presenta problemas de rigor que se analizan en el apartado 3. En el apartado 4 se presenta un método que resuelve el problema que nos ocupa, método que recoge ideas del trabajo de Chow, aunque no exige sus condiciones particulares ni presenta sus problemas de rigor. En el apartado 5 se comparan ambas soluciones. En el apartado 6 se estudian dos problemas económicos (de manera puramente académica) como aplicación-ilustración de la teoría anterior.

2. Enunciado del problema y resultados previos

El problema que nos ocupa consiste en calcular los controles adecuados para que la evolución de un sistema lineal con expectativas racionales sea tal que haga alcanzar el valor mínimo de la función objetivo, definida por la esperanza matemática de una función cuadrática. Se trata, por tanto, del problema lineal-cuadrático habitual en teoría de control, con la novedad de que en el sistema lineal aparecen sumandos con expectativas racionales de las variables endógenas. Tras un comentario general sobre la solución del problema, expondremos en esta sección el método que propone Chow (1980) para resolverlo en unas condiciones particulares.

2.1. Enunciado del problema

$$\begin{cases} MIN\ E_0W = E_0 \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t), \text{ siendo } K_t \text{ matriz simétrica, semidefinida positiva} \\ y_t = B_t y^e_{t/t-1} + B_{1t}\, y^e_{t+1/t-1} + A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t \text{ (Para } t = 1, 2, \ldots, T) \qquad [1] \\ y_0 \text{ dado} \end{cases}$$

en donde:

y_t: es un vector de variables endógenas.

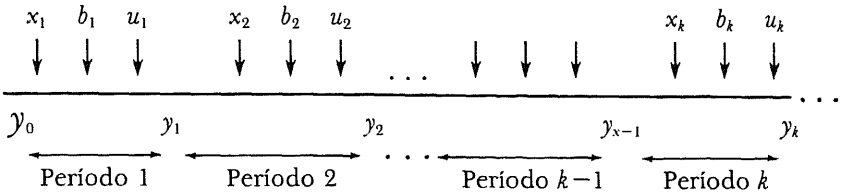
x_t: es un vector de instrumentos políticos (variables de control).

b_t: es un vector que recoge los efectos combinados de las variables exógenas no sujetas a control.

$u_1, u_2, \ldots, u_T$: son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados, de media cero.

$y^{\circ}_{t/k} = E(y_t/I_k)$: es la expectativa (racional) que al final del período k, se tiene sobre el valor que el vector y tomará en el período t.

Suponemos que $I_K = \{y_k, y_{k-1}, \ldots, y_0; u_k, \ldots, u_1; x_k, \ldots, x_1; b_k, \ldots, b_1\}$. Por tanto, I_k recoge la información de todo lo que ha ocurrido hasta el final del período k, según el siguiente esquema:



Suponemos que los vectores a_k, así como las matrices K_t, B_t, B_{1t}, A_t, C_t son datos del problema.

Nota 1. El problema en el que aparezcan en el sistema sumandos del tipo $B_{2t}\, y^{\circ}_{t+2/t-1}, \ldots, B_{pt} y^{\circ}_{t+p/t-1}$ se trata de manera análoga al problema considerado en el sistema [1].

2.2. *Comentario general sobre la solución del problema*

Este problema lo resolvió Chow (1980) para un caso particular: aquel en el que los coeficientes del sistema: B_t, B_{1t}, A_t, C_t, así como a_t, K_t son constantes y, además, el sistema dado se puede hacer estacionario en covarianza a través del tiempo. El problema para el caso general no aparece resuelto en la literatura. W. Buiter (1983), tras exponer la solución de Chow para el caso particular resuelto, dice: «Ahora falta ver si esta solución puede ser extendida al caso en que y_t no sea estacionario en covarianza».

En este trabajo, tras una proposición previa, se partirá del desarrollo de Chow y luego se resolverá el problema para el caso más general.

Proposición (Chow, 1980)

El sistema [1] se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_t = \tilde{B}_{1t} y^{\circ}_{t+1/t-1} + \tilde{A}_t y_{t-1} + \tilde{C}_t x^{\circ}_{t/t-1} + \tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} + v_t \qquad [2]$$

en donde:
$$\tilde{B}_{1t} = (I - B_t)^{-1} B_{1t}$$
$$\tilde{A}_t = (I - B_t)^{-1} A_t$$
$$\tilde{C}_t = (I - B_t)^{-1} C_t$$
$$\tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} = (I - B_t)^{-1} b^{\circ}_{t/t-1}$$
$$v_t = C_t (x_t - x^{\circ}_{t/t-1}) + (b_t - b^{\circ}_{t/t-1}) + u_t$$

Nota 2: Chow, en su trabajo, considera B, B_1, A, C, matrices constantes. Aquí se permite que varíen en el tiempo, siendo la proposición igualmente válida.

Nota 3: Suponemos que los vectores v_t, son incorrelados en el tiempo, y tienen media cero, tal como hace Chow.

Nota 4: Suponemos que, para cada t, la matriz $(I - B_t)$ es no singular.

2.3. Método que propone Chow para resolver el problema en un caso particular

Se considera el problema enunciado en 2.1, con las siguientes hipótesis adicionales:

a) Las matrices del sistema B, B_1, A, C así como los vectores y matrices de la función objetivo a, K se supone que son invariantes en el tiempo.

b) El sistema se puede hacer estacionario en covarianza en el tiempo.

Por la proposición anterior, sabemos que el sistema [1], con la hipótesis adicional *a)*, se puede expresar como:

$$y_t = \tilde{B}_1 y^*_{t+1/t-1} + \tilde{A} y_{t-1} + \tilde{C} x^*_{t/t-1} + \tilde{b}^*_{t/t-1} + v_t \qquad [3]$$

En esta expresión, se considera a $y^*_{t+1/t-1}$ como dado (tal como si fuera una constante) y, entonces, se aplica la programación dinámica, obteniendo, tras identificar $\hat{x}_t$ con $\hat{x}^*_{t/t-1}$, la siguiente ecuación de control:

$$\hat{x}_t = G_{1t} y^*_{t+1/t-1} + G_t y_{t-1} + g_t \qquad [4]$$

Bajo ciertas condiciones referentes a los parámetros del sistema, los coeficientes G_{1t}, G_t, g_t pueden hacerse invariantes en el tiempo al crecer T. También puede ocurrir que G_{1t} y G_t sean invariantes y g_t cambie en el tiempo para reflejar cambios en $\tilde{b}^*_{t/t-1}$, pero el sistema bajo control permanecerá estacionario en covarianza.

Supongamos que el sistema se puede hacer estacionario en covarianza, utilizando la regla de control dada. Sustituyendo $\hat{x}_t = \hat{x}^*_{t/t-1}$, dado por [4] en el sistema [3], se obtiene:

$$y_t = R_1 y^*_{t+1/t-1} + R y_{t-1} + r + v_t \qquad [5]$$

en donde: $R_1 = \tilde{B}_1 + \tilde{C} G_1$

$R = \tilde{A} + \tilde{C} G$

$r = \tilde{b}^*_{t/t-1} + \tilde{C} g_t$

Si el sistema [5] es estacionario en covarianza, debe existir un sistema observacionalmente equivalente:

$$y_t = P y_{t-1} + s + v_t \qquad [6]$$

en donde los autovalores de P son menores que uno, en valor absoluto.

Para encontrar P y s utilizamos el método de solución llamado de coeficientes indeterminados, para una ecuación en diferencias con expectativas racionales:

$$y_{t+1} = P y_t + s + v_{t+1}$$

$$\Rightarrow y^*_{t+1/t-1} = P y^*_{t/t-1} + s$$

Pero, a partir de [6], obtenemos: $y^*_{t/t-1} = Py_{t-1} + s$

Por tanto:

$$y^*_{t+1/t-1} = P[Py_{t-1} + s] + s = P^2y_{t-1} + (P+I)s \qquad [7]$$

Sustituyendo en [5]:

$$y_t = R_1(P^2y_{t-1} + (P+I)s) + Ry_{t-1} + r + v_t$$

O sea que:

$$y_t = (R_1P^2 + R)y_{t-1} + R_1(P+I)s + r + v_t$$

Identificando los coeficientes de esta última ecuación con los del sistema [6], tenemos:

$$P = (I - R_1P)^{-1}R$$
$$s = (I - R_1(P+I))^{-1}r$$

Habiendo calculado P y s a partir de estas expresiones, podemos obtener $y^*_{t+1/t-1}$ en [7] y llevarlo a la expresión [4], para obtener $\hat{x}_t$, obteniendo una expresión de la forma $\hat{x}_t = F_ty_{t-1} + f_t$, con lo que el problema queda resuelto.

3. Comentarios y crítica al artículo de Chow (1980)

En esta sección se señalan algunas imprecisiones que se observan en el artículo de Chow, las cuales van a ser corregidas en el método que se propone en la sección 4.

Como hemos visto en la sección anterior, lo primero que hace Chow es considerar $y^*_{t+1/t-1}$ como dado en el sistema [3] y aplicar la programación dinámica, obteniendo, tras identificar x_t con $x^*_{t/t-1}$ la expresión [4], en donde G_{1t}, G_t, g_t se calculan a partir de los datos iniciales del problema. A continuación sustituye en el sistema dado el valor obtenido para el control óptimo, obteniendo un sistema de ecuaciones en diferencias con expectativas racionales, sin variables de control. Necesita, entonces, resolver el sistema y lo hace por el método de coeficientes indeterminados para lo cual necesita imponer las condiciones de partida señaladas en el apartado anterior. Tras resolver el sistema puede calcular $y^*_{t+1/t-1}$ y llevarlo a la expresión de $\hat{x}_t$, con lo que el problema queda resuelto.

En este trabajo se van a tomar básicamente las ideas de Chow pero al llegar al punto de resolver el sistema, se va a hacer por otro método, precisamente el que el propio Chow propone en la primera parte del mismo trabajo, al estudiar el tratamiento de sistemas con expectativas racionales, para lo cual no hace falta exigir que el sistema se haga estacionario en covarianza a través del tiempo, ni que los coeficientes del sistema ni los de la función objetivo sean constantes, si bien se necesita una condición de transversalidad (se utilizará la que propone Chow: que en el período final T: $y^*_{T+1/T-1} = \Gamma y^*_{T/T-1}$).

Además de las ideas generales expresadas, hay que hacer algunas puntualizaciones al trabajo de Chow.

Escribe en su artículo: «Tratando a $y^{\circ}_{t+1/t-1}$ como dado en el sistema de ecuación $y_t = \tilde{B}_1 y^{\circ}_{t+1/t-1} + \tilde{A} y_{t-1} + \tilde{C} x^{\circ}_{t/t-1} + \tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} + v_t$, y minimizando la esperanza de una función de pérdida cuadrática para T períodos, podemos aplicar la programación dinámica como en Chow (1975, Cap. 8), para encontrar una ecuación de control óptimo en bucle cerrado: $\hat{x}_t = G_{1t} y^{\circ}_{t+1/t-1} + G_t y_{t-1} + g_t$». Este párrafo nos merece los dos comentarios siguientes:

1.º La cita anterior significa que $\hat{x}_t$ se calcularía de la siguiente forma:

El sistema dado se puede expresar $y_t = \tilde{A} y_{t-1} + \tilde{C} x^{\circ}_{t/t-1} + (\tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} + \tilde{B}_1 y^{\circ}_{t+1/t-1}) + v_t$, en donde el término que aparece entre paréntesis sería el b_t del problema stándard de control (Chow, 1975).

Identificando x_t con $x^{\circ}_{t/t-1}$, como hace Chow, y aplicando el resultado conocido de control óptimo para el problema lineal cuadrático habitual:

$$\hat{x}_t = \overline{G}_t y_{t-1} + \overline{g}_t \qquad [8]$$

en donde:
$$\begin{cases} \overline{G}_t = -(\tilde{C}' H_t \tilde{C})^{-1} \tilde{C}' H_t \tilde{A} \\ \overline{g}_t = -(\tilde{C}' H_t \tilde{C})^{-1} \tilde{C}' [H_t (\tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} + \tilde{B}_1 y^{\circ}_{t+1/t-1}) - h_t] = \\ = -(\tilde{C}' H_t \tilde{C})^{-1} \tilde{C}' H_t \tilde{B}_1 y^{\circ}_{t+1/t-1} - (\tilde{C}' H_t \tilde{C})^{-1} \tilde{C}' \ [H_t \tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} - h_t] \end{cases}$$

Definimos:
$$\begin{cases} G_{1t} = -(\tilde{C}' H_t \tilde{C})^{-1} \tilde{C}' H_t \tilde{B}_1 & [9] \\ G_t = \overline{G}_t = -(\tilde{C}' H_t \tilde{C})^{-1} \tilde{C}' H_t \tilde{A} & [10] \\ g_t = -(\tilde{C}' H_t \tilde{C})^{-1} \tilde{C}' [H_t \tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} - h_t] & [11] \end{cases}$$

con lo cual [8] queda

$$\hat{x}_t = G_{1t} y^{\circ}_{t+1/t-1} + G_t y_{t-1} + g_t \qquad [12]$$

en donde las matrices G_{1t}, G_t, g_{1t} dependen de H_t y h_{1t}. Veamos cuáles son:

$$H_{t-1} = K_{t-1} + (\tilde{A} + \tilde{C} G_t)' H_t (\tilde{A} + \tilde{C} G_t), \text{ con } H_T = K_T \qquad [13]$$

(por tanto, las matrices G_{1t}, G_t las podemos ir calculando sin problemas, a partir de los coeficientes del sistema y de la función objetivo).

$$h_{t-1} = K_{t-1} a_{t-1} + (\tilde{A} + \tilde{C} G_t)' [h_t - H_t (\tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} + \tilde{B}_1 y^{\circ}_{t+1/t-1})] \qquad [14]$$

con $h_T = K_T a_T$, que depende de $y^{\circ}_{t+1/t-1}$. Por tanto, los vectores g_t no se pueden calcular a partir de los coeficientes del sistema y de la función objetivo. Vemos que g_t depende de h_t que a su vez, para $t < T$ depende de $y^{\circ}_{t+2/t}$. Esto no parece tenerlo en cuenta Chow, cuando sustituye [4] en el sistema [3], obteniendo [5], que utilizará posteriormente para calcular $y^{\circ}_{t+1/t-1}$.

2.º Siguiendo con la exposición que hemos hecho en el punto 1.º, no sería correcta la identificación que hace Chow, de que $\hat{x}_t = \hat{x}^{\circ}_{t/t-1}$. En efecto:

$$\hat{x}_t = G_{1t} y^{\circ}_{t+1/t-1} + G_t y_{t-1} + g_t$$

$$\text{pero} \quad \begin{cases} g_t = -(\tilde{C}' H_t \tilde{C})^{-1} \tilde{C}' \; [H_t \tilde{b}^*_{t/t-1} - h_t] \\ h_t = K_t a_t + (\tilde{A} + \tilde{C} G_{t+1})' \; [h_{t+1} - \mathrm{H}_{t+1} (\tilde{b}^*_{t+1/t} + \tilde{B}_1 y^*_{t+2/t})] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{x}^*_{t/t-1} = G_{1t} y^*_{t+1/t-1} + G_t y_{t-1} + g^*_{t/t-1}$$

$$\text{pero} \quad \begin{cases} g^*_{t/t-1} = -(\tilde{C}' H_t \tilde{C})^{-1} \tilde{C}' \; [H_t \tilde{b}^*_{t/t-1} - h^*_{t/t-1}] \\ h^*_{t/t-1} = K_t a_t + (\tilde{A} + \tilde{C} G_{t+1})' \; [h^*_{t+1/t-1} - H_{t+1} (\tilde{b}^*_{t+1/t-1} + \tilde{B}_1 y^*_{t+2/t-1})] \end{cases}$$

En general: $h_t \neq h^*_{t/t-1} \Rightarrow g_t \neq g^*_{t/t-1} \Rightarrow \hat{x}_t \neq \hat{x}^*_{t/t-1}$

En nuestro trabajo corregimos estas dos posibles deficiencias.

A continuación del párrafo comentado anteriormente, escribe Chow: «Bajo ciertas condiciones de los parámetros del sistema, tal como vienen en Chow (1975, págs. 170-172), los coeficientes G_{1t}, G_t, g_t pueden llegar a ser invariantes en el tiempo cuando T crece. Puede también ocurrir que G_{1t}, G_t sean invariantes en el tiempo y que g_t cambie para reflejar cambios en $b^*_{t/t-1}$ pero el sistema bajo control óptimo siga siendo estacionario en covarianza. Supongamos que el sistema dado puede hacerse estacionario en covarianza utilizando tal regla; es decir, cuando $\hat{x}_t = G_{1t} y^*_{t+1/t-1} + G_t y_{t-1} + g_t$ sustituye a $x^*_{t/t-1}$ en la ecuación del sistema, obtendremos un sistema estacionario en covarianza: $y_t = R_1 y^*_{t+1/t-1} + R y_{t-1} + r + v_t$, en donde $R_1 = \tilde{B}_1 + \tilde{C} G_1$; $R_2 = \tilde{A} + \tilde{C} G$ y $r = \tilde{b}^*_{t/t-1} + \tilde{C} g_t$. Si este sistema es estacionario en covarianza bajo expectativas racionales, debe existir un sistema observacionalmente equivalente: $y_t = P y_{t-1} + s + v_t$, en donde los autovalores de la matriz P son todos ellos menores que uno en valor absoluto». Este párrafo también nos merece algunos comentarios.

1.º Estamos ocupados en un problema en el que T es fijo, finito. Entendemos que el plantearnos qué ocurre cuando T crece y estudiar condiciones de convergencia de las matrices G_{1t}, G_t, g_t corresponde a otro problema, interesante pero diferente al que nos ocupa.

2.º Si se consideran las matrices G_{1t}, G_t definidas en [9] y [10] referidas a la matriz H_t, obtenida en [13], es fácil estudiar condiciones de convergencia para G_1, G y H (se puede utilizar el teorema que aparece en Bertsekas (1976), pág. 75, adaptado a este caso que resulta más riguroso, nos parece, que el análisis que hace Chow (1975)). El problema es que si fuera así, el planteamiento sería incorrecto, tal como hemos señalado anteriormente, aparte de que no podríamos calcular los vectores g_t.

Al tratar de corregir estas deficiencias en nuestro trabajo, nos encontramos con que las matrices G_{1t}, G_t siguen valiendo lo mismo que en [9] y [10] pero con respecto a una matriz H_t diferente a la obtenida en [13]. Con ello, al plantearnos el problema del tiempo infinito (que es otro problema diferente al que nos ocupa) se nos complica muchísimo el estudio de la convergencia de las matrices H_t y, por consiguiente de G_{1t} y G_t.

3.º Es cierto que, aunque $\tilde{b}^{*}_{t/t-1} + \tilde{C}g_t$ dependa del tiempo, el sistema seguirá siendo estacionario en covarianza. En ese caso $\tilde{b}^{*}_{t/t-1} + \tilde{C}g_t$ variará con el tiempo y habrá que utilizar la notación r_t y no r. Entendemos que el que ese término sea constante o varíe con el tiempo no tiene nada que ver con que el sistema sea estacionario en covarianza o no lo sea pero sí tendrá que ver con la solución del sistema.

Es decir: si r es constante ⇨ la solución del sistema

$$y_t = R_1 y^{*}_{t+1/t-1} + Ry_{t-1} + r + v_t,$$

se podrá calcular por el método de coeficientes indeterminados, tal como hace Chow en su artículo y, por tanto, el sistema observacionalmente equivalente será el que allí aparece.

Si r no es constante (r_t), el sistema seguirá siendo estacionario en covarianza, pero no es cierto que la solución al sistema sea la que expresa Chow en su artículo. En efecto:

Sea el sistema: $y_t = R_1 y^{*}_{t+1/t-1} + Ry_{t-1} + r_t + v_t$

a) Veamos que no puede ser solución: $y_t = Py_{t-1} + s + v_t$ (siendo *s:* constante)

$$y_{t+1} = Py_t + s + v_{t+1}\ ;\ y^{*}_{t/t-1} = Py_{t-1} + s$$

$$y^{*}_{t+1/t-1} = Py^{*}_{t/t-1} + s = P[Py_{t-1} + s] + s = P^2 y_{t-1} + Ps + s$$

Sustituyendo este valor en el sistema, queda:

$$y_t = R_1[P^2 y_{t-1} + (P+I)s] + Ry_{t-1} + r_t + v_t = (R_1P^2 + R)\,y_{t-1} + R_1[P+I]s + r_t + v_t$$

$$\Rightarrow P = R_1P^2 + R$$

$$s = R_1[P+I]s + r_t$$

$$s = [I - R_1(P+I)]^{-1} r_t$$

Imposible: todo es constante excepto r_t, que varía en el tiempo.

b) Calculemos la solución correcta.

La solución tiene que ser $y_t = Py_{t-1} + s_t + v_t$
(con los autovalores de P, menores que 1 en valor absoluto)

$$y^{*}_{t/t-1} = Py_{t-1} + s^{*}_{t/t-1}$$

$$y_{t+1} = Py_t + s_{t+1} + v_{t+1} \qquad y^{*}_{t+1/t-1} = Py^{*}_{t/t-1} + s^{*}_{t+1/t-1} =$$

$$= P[Py_{t-1} + s^{*}_{t/t-1}] + s^{*}_{t+1/t-1}$$

$$\text{Luego: } y_t = R_1[P^2 y_{t-1} + Ps^{*}_{t/t-1} + s^{*}_{t+1/t-1}] + Ry_{t-1} + r_t + v_t =$$

$$= (R_1P^2 + R)y_{t-1} + R_1(Ps^{*}_{t/t-1} + s^{*}_{t+1/t-1}) + r_t + v_t$$

Identificando coeficientes, nos queda:

$$P = R_1 P^2 + R \Rightarrow P = (I - R_1 \mathrm{P})^{-1} R$$

$$s_t = R_1 (P s^{\circ}_{t/t-1} + s^{\circ}_{t+1/t-1}) + r_t$$

(Si r es constante, nos queda s, constante con el mismo valor que obtiene Chow).

Por tanto: si r no es constante no sirve el método de coeficientes indeterminados, al menos tal como lo utiliza Chow. Si r cambia con el tiempo la solución del sistema (el sistema observacionalmente equivalente que él considera) no será correcta y ello tiene repercusiones en el control y en la evolución del sistema.

Terminaremos este apartado señalando de nuevo, porque nos parece muy importante, que la convergencia de G_{1t}, G_t, g_t tiene que ver con la de las matrices H_t y h_t que no aparecen en el artículo de Chow. Si H_t, h_t fueran las dada por [13] y [14], hemos visto deficiencias importantes, o sea que el problema estaría mal abordado. Si no son éstas ¿cuáles son? En nuestro trabajo hemos encontrado otras H_t y h_t con las que eliminamos las deficiencias señaladas, pero cuando nos planteamos el problema cuando T fuera infinito nos encontramos con enormes dificultades para estudiar la convergencia.

4. Solución al problema para el caso general

En este apartado se enuncia el teorema que nos da el método para resolver el problema que nos ocupa, formulado en la sección 2.

El teorema se basa en los puntos siguientes:

1. Expresar el sistema dado, [1], en la forma que se obtiene en la proposición [2].

2. Tratar a $y^{\circ}_{t+1/t-1}$ como un dato conocido, y utilizar la programación dinámica, obteniendo:

$$\hat{x}_t = G_{1t} y^{\circ}_{t+1/t-1} + G_t y_{t-1} + g_t$$

3. Sustituir esta expresión en el sistema [2], obteniendo:

$$y_t = R_{1t} y^{\circ}_{t+1/t-1} + R_t y_{t-1} + r_t + v_t$$

4. Resolver este sistema hacia atrás en el tiempo, utilizando una condición de transversalidad, obteniendo:

$$y_t = P_t y_{t-1} + s_t + v_t$$

A partir de esta expresión, se calcula fácilmente $y^{\circ}_{t+1/t-1}$ que se lleva a la fórmula de $\hat{x}_t$, obteniendo la solución final al problema.

Tras el enunciado del teorema, haremos un comentario a la condición de transversalidad utilizada: $y^{\circ}_{T+1/T-1} = \Gamma y^{\circ}_{T/T-1}$.

4.1. Teorema

Se considera el problema enunciado en la sección 2. Se supone que para $t = T$ (período final), se verifica que $y^{\circ}_{T+1/T-1} = \Gamma y^{\circ}_{T/T-1}$. Se supone que las variables b_t son estoćasticas.

Tratando a los vectores $y^{\circ}_{t+1/t-1}$ como dados, se utiliza la programación dinámica, obteniendo

$$\hat{x}_t = G_t y_{t-1} + G_{1t} y^{\circ}_{t+1/t-1} + g_t \qquad [15]$$

con lo cual la evolución del sistema controlado, se puede expresar como:

$$y_t = P_t y_{t-1} + s_t + v_t \qquad [16]$$

en donde:

$$\begin{cases} G_t = -(\tilde{C}_t' H_t \tilde{C}_t)^{-1} \tilde{C}_t' H_t \tilde{A}_t \\ G_{1t} = -(\tilde{C}_t' H_t \tilde{C}_t)^{-1} \tilde{C}_t' H_t \tilde{B}_{1t} \\ g_t = -(\tilde{C}_t' H_t \tilde{C}_t)^{-1} \tilde{C}_t' (H_t \tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} - h^{\circ}_{t/t-1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_t = (I - R_{1t} P_{t+1})^{-1} R_t. \text{ siendo } P_{T+1} = \Gamma \\ s_t = (I - R_{1t} P_{t+1})^{-1} (r_t + R_{1t} s^{\circ}_{t+1/t-1}), \text{ siendo } S_{T+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_t = \tilde{A}_t + \tilde{C}_t G_t \\ R_{1t} = \tilde{B}_{1t} + \tilde{C}_t G_{1t} \\ r_t = \tilde{b}^{\circ}_{t/t-1} + \tilde{C}_t g_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_t = K_t + P'_{t+1} H_{t+1} P_{t+1}, \text{ con } H_T = K_T \\ h_t = K_t a_t + P'_{t+1} (h^{\circ}_{t+1/t-1} - H_{t+1} s_{t+1}), \text{ con } h_T = K_T a_T \\ c_t = a_t' K_t a_t + s'_{t+1} H_{t+1} s_{t+1} - 2 s'_{t+1} h^{\circ}_{t+1/t} + E_t (v'_{t+1} H_{t+1} v_{t+1}) + E_t (c_{t+1}), \text{ con} \\ c_T = a_T' K_T a_T \end{cases}$$

Además, $\hat{V}_t(y_{t-1}) = y'_{t-1} P_t' H_t P_t y_{t-1} - 2 y'_{t-1} P_t' (h^{\circ}_{t/t-1} - H_t s_t) + s_t' H_t s_t -$
$- 2 s_t' h^{\circ}_{t/t-1} + E_{t-1}(v_t' H_t v_t) + E_{t-1}(c_t),$

siendo $\hat{V}_t(y_{t-1}) = MIN E_{t-1}((y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) + \hat{V}_{t+1}(y_t))$, con $V_{T+1}(y_T) = 0$.

Calculando $y^{\circ}_{t+1/t-1}$ a partir de [16] y sustituyendo en [15] queda finalmente:

$$\boxed{\hat{x}_t = F_t y_{t-1} + f_t} \text{ , en donde } \begin{cases} F_t = G_t + G_{1t} P_{t+1} P_t \\ f_t = g_t + G_{1t} (P_{t+1} s_t + s^{\circ}_{t+1/t-1}) \end{cases}$$

La demostración del teorema se incluye en el apéndice.

4.2. Comentarios sobre la condición de transversalidad utilizada

Hemos utilizado la condición de que $y^{\circ}_{T+1/T-1} = \Gamma y^{\circ}_{T/T-1}$, con Γ, matriz dada, para T, período final.

Esta condición la justifica Chow, cuando estudia el tratamiento de sistemas dinámicos con expectativas racionales, ya que para llegar a una única secuencia de predicciones en modelos de este tipo con expectativas racionales, hay que proporcionar una condición adicional y el período final es un lugar conveniente para poner y examinar tal condición.

Aquí se toma esa condición para resolver el sistema hacia atrás en el tiempo. La solución del problema, como se ha visto, depende de esta condición. Su influencia en la solución será tanto menor cuanto mayor sea el horizonte temporal.

Si $y_{T+1} = \Gamma y_T + u_T$, siendo u_T variable aleatoria de media cero, incorrelada con I_{T-1}, entonces $y^{\circ}_{T+1/T-1} = \Gamma y^{\circ}_{T/T-1}$. Se puede interpretar, por tanto, la condición que estamos comentando, como la hipótesis $y_{T+1} = \Gamma y_T + u_T$ (*). Esta hipótesis no será contrastable.

El método de solución propuesto es válido independientemente del supuesto que se haga de la relación (*). En particular se pueden suponer distintas estructuras como $y_{T+1} = \Gamma y_T + \partial + u_T$; $y_{T+1} = \Gamma_1 y_T + \Gamma_2 y_{T-1} + u_T$ etc. En todos los casos se resolvería el problema de manera análoga a la del teorema y llegando siempre a que el sistema controlado evolucionará de acuerdo con ecuaciones de la forma:

$$y_t = M_t y_{t-1} + m_t + v_t \qquad \{v_t\}\text{: incorrelados, de media cero.}$$

5. Comparación del resultado final de Chow con el que se obtiene en este trabajo

Vamos a comprobar que el resultado de Chow queda como un caso particular del resultado al que se llega en este trabajo.

Trabajo de Chow

Supongamos que al crecer t se hacen G_{1t}, G_t, g_t constantes

$$\Rightarrow \hat{x}_t = G_1 y^{\circ}_{t+1/t-1} + G y_{t-1} + g$$

Entonces el sistema se puede expresar:

$$y_t = R_1 y^{\circ}_{t+1/t-1} + R y_{t-1} + r + v_t \Leftrightarrow y_t = P y_{t-1} + s + v_t$$

$$\text{en donde} \begin{cases} P = (I - R_1 P)^{-1} R \\ s = (I - R_1 (P + I))^{-1} r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y^{\circ}_{t+1/t-1} = P^2 y_{t-1} + (P + I) s$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}_t = G_1(P^2 y_{t-1} + (P+I)s) + G y_{t-1} + g =$$
$$= (G_1 P^2 + G) y_{t-1} + g + G_1 (P+I) s$$

Resultado que se obtiene en este trabajo:

$$\hat{x}_t = G_{1t} y^{\circ}_{t+1/t-1} + G_t y_{t-1} + g_t$$

$\Rightarrow$ El sistema se puede expresar:

$$y_t = R_{1t} y^{\circ}_{t+1/t-1} + R_t y_{t-1} + r_t + v_t \Leftrightarrow y_t = P_t y_{t-1} + s_t + v_t$$

en donde $\begin{cases} P_t = (I - R_{1t} P_{t+1})^{-1} R_t, \text{ con } P_{T+1} = \Gamma \\ s_t = (I - R_{1t} P_{t+1})^{-1} (r_t + R_{1t} s^{\circ}_{t+1/t-1}), \text{ con } s_{T+1} = 0 \end{cases}$

Supongamos que se verifican condiciones suficientes para que G_{1t}, G_t, g_t, R_{1t}, R_t, r_t, P_t y s_t sean constantes en el tiempo:

$$\Rightarrow \quad P = (I - R_1 P)^{-1} R$$
$$s = (I - R_1 P)^{-1} (r + R_1 s) \Leftrightarrow s = (I - R_1 (P+I))^{-1} r$$
$$\hat{x}_t = (G_1 P^2 + G) y_{t-1} + g + G_1 (P+I) s$$

En estas condiciones el resultado obtenido en este trabajo coincide con el de Chow. Con ello queda demostrado que el planteamiento y solución que se proponen en este trabajo son más generales que los de Chow para el problema que nos ocupa.

6. Ejemplos

En este apartado se estudia el problema de control óptimo en dos modelos económicos concretos con expectativas racionales. En cada caso el problema de control se resuelve aplicando el método que se presenta en los apartados anteriores.

En el problema 1, el sistema tiene una variable de estado y una variable de control, mientras que en el problema 2 hay dos variables de estado y una variable de control. Como se comprobará a continuación, el hecho de tener dos variables de estado en lugar de una, teniendo una variable de control en ambos casos, da lugar a diferencias importantes tanto en los cálculos como en los resultados que se obtienen.

6.1. Problema 1

a) ENUNCIADO

$$\begin{cases} MIN\, E_1 \sum_{t=2}^{T} \Pi_t^2 \\ \Pi_t = B_1 \Pi^{\circ}_{t+1/t-1} + A \Pi_{t-1} + C m_t + u_t \quad (\text{para } t = 2, 3, \ldots, T) \\ \text{con } \Pi_1 \text{ dado} \end{cases}$$

en donde:

Π_t: es la tasa de inflación en el período t (es, por tanto, una variable escalar).

m_t: es la tasa de variación de la oferta monetaria en el período t. Es la variable de control, también escalar.

u_t: perturbación aleatoria en el período t. Suponemos que $u_2, u_3, \ldots, u_T$ son variables aleatorias mutuamente incorreladas, de media cero, y varianza Σ_u, idénticamente distribuidas.

B_1, A, C: son números reales dados.

$\Pi^*_{t+1/t-1} = E(\Pi_{t+1} \mid I_{t-1})$: Es la expectativa (racional) que, al final del período $t-1$, se tiene sobre el valor que la variable Π tomará en el período $t+1$.

b) INTERPRETACIÓN DEL PROBLEMA

En este modelo se acepta el hecho de que existen correlaciones intertemporales significativas entre la tasa de variación de la oferta monetaria y la tasa de inflación. Se supone que la autoridad económica controla, con bastante aproximación, la tasa de variación de la oferta monetaria y ésta tiene efectos sobre los precios, tanto contemporáneamente, como a lo largo de un número de períodos. El sistema anterior sugiere que la tasa de inflación depende: 1) de su propio pasado; 2) de las expectativas de sus valores futuros; 3) de la actuación de la autoridad económica; 4) de shocks exógenos.

El significado de la función objetivo es que se penalizan las desviaciones de la tasa de inflación del objetivo fijado cero.

c) SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Aplicando el teorema que resuelve el problema general, obtenemos:

$$\hat{m}_t = F_t \Pi_{t-1} = G_t \Pi_{t-1} = -\frac{A}{C} \Pi_{t-1}$$

Además, al utilizar ese control óptimo, la evolución del sistema controlado vendrá dada por

$$\Pi_t = P_t \Pi_{t-1} + s_t + u_t = u_t, \quad \text{para } t = 2, 3, \ldots, T$$

y el valor de la función objeto en el óptimo será:

$$\hat{V}_2(\Pi_1) = E_1 \sum_{t=2}^{T} u_t^2 = \sum_{t=2}^{T} E_1(u_t^2) = (T-1) \sum_u$$

Los resultados obtenidos merecen algunos comentarios:

1.º La solución del problema coincide con la que se obtendría en el mismo sistema, sin que aparecieran las expectativas (es decir, con $B_1 = 0$).

$$\hat{m}_t = F_t \Pi_{t-1} = G_t \Pi_{t-1}$$

Este resultado tiene explicación: como hemos visto, $\forall t = 2, 3, ..., T$ la evolución del sistema controlado viene dada por $\Pi_t = u_t \Rightarrow \Pi_{t+1} = u_{t+1}$

$$\Rightarrow \quad \Pi^*_{t/t-1} = E(u_t \mid I_{t-1}) = 0$$
$$\Pi^*_{t+1/t-1} = E(u_{t+1} \mid I_{t-1}) = 0$$

luego las expectativas son cero. Esto es así porque desde el período 2, al utilizar el control óptimo, el sistema alcanza el valor objetivo cero, salvo perturbaciones aleatorias de media cero.

2.º La solución del problema es independiente de Γ.

El significado de Γ es que, para $t = T$, período final, $\Pi^*_{T+1/T-1} = \Gamma \Pi^*_{T/T-1}$ pero, como hemos visto en el comentario 1.º), $\Pi^*_{T/T-1} = 0 \Rightarrow \Pi^*_{T+1/T-1} = 0$ y Γ no juega ningún papel.

d) EFECTO DE CAMBIOS EN LOS PARÁMETROS DEL PROBLEMA

1.º Supongamos que la función objetivo fuera $MIN\, E_1 \sum_{t=2}^{T} (\Pi_t - a)^2$; o el objetivo prefijado para la inflación es a y que en el sistema aparece un sumando más: b. Es decir, analizamos el caso en que $a_t = a \neq 0$, y $b_t = b \neq 0$, $\forall t = 2, 3, ..., T$.

Entonces: $\hat{m}_t = F_t \Pi_{t-1} + f_t$, en donde los valores F_t siguen iguales al caso inicial pero los f_t ya no valdrán cero. Obtenemos:

$$\hat{m}_T = -\frac{A}{C} \Pi_{T-1} - \frac{b-a}{C} + \frac{-B_1}{C} \Gamma a$$

$$\hat{m}_t = -\frac{A}{C} \Pi_{t-1} - \frac{b-a}{C} - \frac{B_1}{C} a, \text{ para } t = 2, 3, ..., T-1.$$

La evolución del sistema controlado viene dada por:

$$\Pi_t = a + u_t, \text{ para } t = 2, 3, ..., T$$

En particular: Si $a = 0, b \neq 0 \Rightarrow \hat{m}_t = G_t \Pi_{t-1} + g_t$, para $t = 2, 3, ..., T$ y la solución al problema es la misma que si no apareciera el sumando con la expectativa de la inflación (o sea, si $B_1 = 0$).

Si $a \neq 0$, la solución óptima coincide con la del siguiente sistema sin expectativas:

$$\Pi_t = A\Pi_{t-1} + Cm_t + \beta_t + u_t$$

$$\text{en donde } \beta_t = \begin{cases} b + B_1 a, & \text{para } t = 2, 3, \ldots, T-1 \\ b + B_1 \Gamma a, & \text{para } t = T \end{cases}$$

2.º Consideremos ahora que, con respecto al problema inicial, B_{1t}, A_t, C_t varían en el tiempo.

Entonces, $\forall t = 2, 3, \ldots, T$

$$\hat{m}_t = F_t \Pi_{t-1} = G_t \Pi_{t-1} = -\frac{A_t}{C_t} \Pi_{t-1}$$

La evolución del sistema controlado, viene dada por: $\Pi_t = u_t$, y el valor óptimo de la función objetivo sigue siendo $\hat{V}_2(\Pi_1) = (T-1) \sum_u$.

3.º Supongamos que Π_t es de dimensión $n \times 1$. Al cambiar la dimensión de Π_t, varía totalmente la forma de la solución y su manera de calcularla. En efecto, en general H_t (matriz $n \times n$), variará con $t \Rightarrow G_t$, G_{1t} (vectores n-dimensionales), variarán con $t \Rightarrow R_t, R_{1t}, P_t$ (matrices $n \times n$) variarán con t y, en general, no serán cero. F_t, variará con t y, en general, será distinta de G_t.

e) SOLUCIÓN CON DATOS NUMÉRICOS

Vamos a resolver, en concreto, el siguiente problema

$$\begin{cases} MIN\, E_1 \sum_{t=2}^{50} \Pi_t^2 \\ \Pi_t = \frac{1}{2} \Pi^{\circ}_{t+1/t-1} + \frac{1}{2} \Pi_{t-1} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) m_t + u_t, \text{ para } t = 2, 3, \ldots, 50. \\ \Pi_1 = 12 \\ \text{Para cada } t,\ u_t = N(0,1), \text{ siendo } u_2, u_3, \ldots, u_{50} \text{ incorrelados.} \end{cases}$$

De acuerdo con los razonamientos previos, el control óptimo se obtendrá de la siguiente forma:

$$\hat{m}_t = -\frac{1}{2} \frac{t}{t+1}, \quad \text{para } t = 2, 3, \ldots, 50.$$

y la evolución del sistema controlado, vendrá dado por $\Pi_t = u_t$, $\forall t = 2, 3, \ldots, 50$.

Se han simulado con ordenador, valores para las variables u_t, de acuerdo con las condiciones del enunciado y hemos obtenido para el control óptimo los resultados que se recogen en el gráfico. 1.

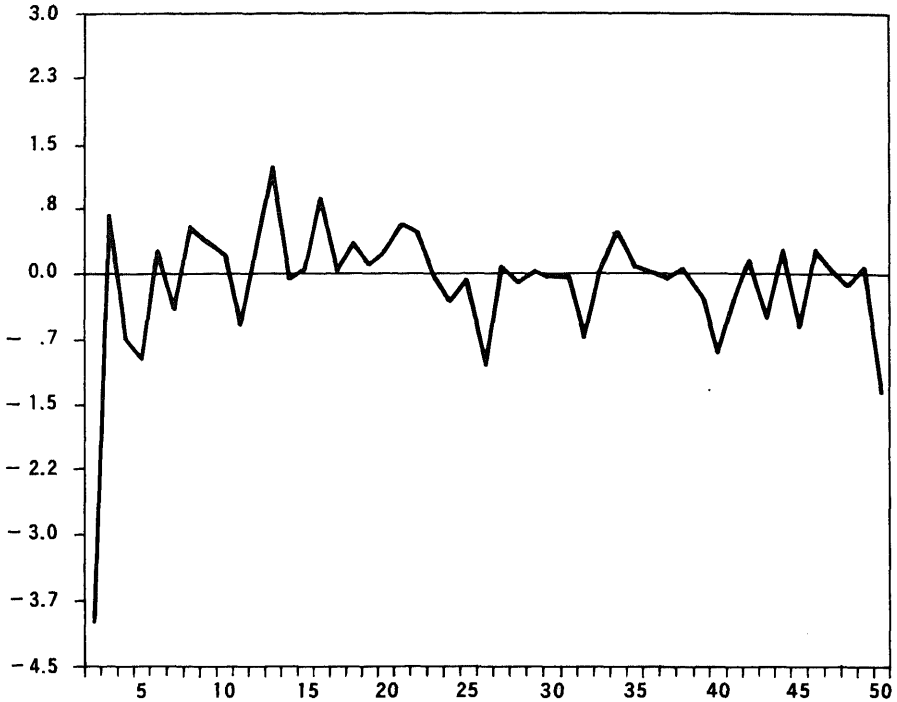


Gráfico 1

Los valores de la variable de estado, correspondientes al sistema controlado, aparecen en el gráfico 2.

En el gráfico 1 vemos que en el período 2 (el primero en el que se actúa sobre el sistema), el valor de la variable de control es grande, en valor absoluto (hay contracción de la oferta monetaria), con lo que se consigue llevar al sistema cerca del objetivo prefijado (cero), ya en el período 2. En los demás períodos, parece que la variable de control sólo contrarresta los valores de las perturbaciones aleatorias (hay acomodación de la oferta monetaria), y el sistema controlado se mantiene en torno al valor que ya alcanzaba en el período 2.

6.2. *Problema 2*

a) ENUNCIADO

$$MIN\ E_1 W = E_1 \sum_{t=2}^{T} (y_{1t} - a_1)^2 + (y_{2t} - a_2)^2$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{\circ}_{1,t+1/t-1} \\ y^{\circ}_{2,t+1/t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} +$$

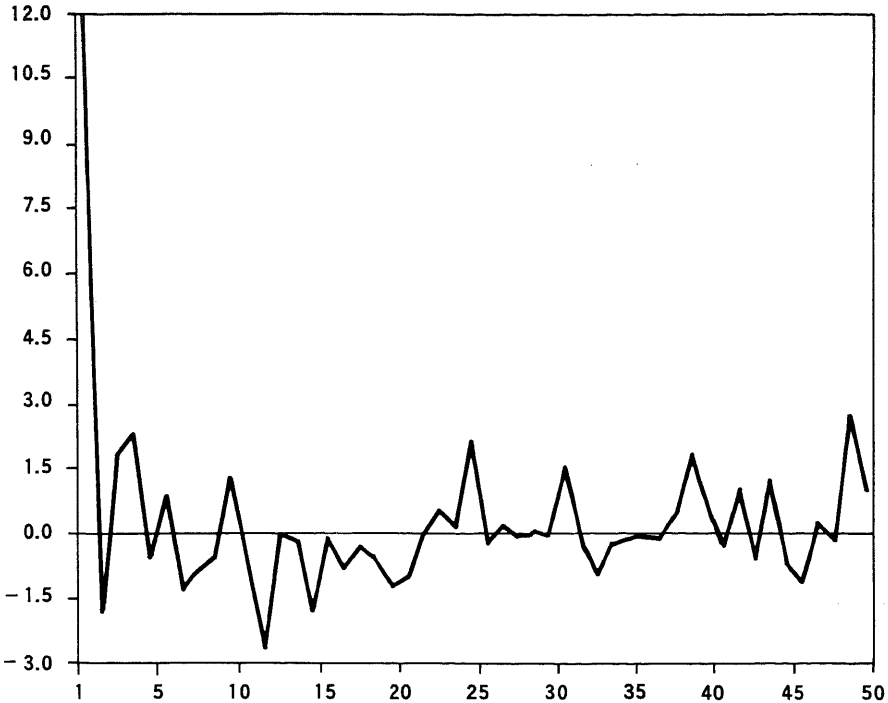


Gráfico 2

$$+ \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} m_t + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

(Para $t = 2, 3, \ldots, T$)

con $y_{1,1} = \bar{y}_{1,1}$

$y_{2,1} = \bar{y}_{2,1}$

en donde:

y_{1t}: es la tasa de inflación en el período t.

y_{2t}: es el tipo de interés nominal, en el período t.

(y_{1t}, y_{2t} son las variables de estado).

m_t: es la tasa de variación de la oferta monetaria. Es la variable de control.

$\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$: son vectores aleatorios normales, de media cero y covarianza $\sigma^2 I$, serialmente incorrelados.

$y^{\circ}_{i,\,t+1/t-1} = E[y_{i,\,t+1}/I_{t-1}]$ ($i = 1,2$): es la expectativa (racional) que, al final del período $t-1$, se tiene sobre el valor que la variable y_i tomará en el período $t+1$.

b) INTERPRETACIÓN DEL PROBLEMA

En este modelo se parte de que existen correlaciones intertemporales significativas entre la tasa de variación de la oferta monetaria y las variables tasa de inflación y tipo de interés nominal. La tasa de variación de la oferta monetaria, que suponemos controla con bastante aproximación la autoridad económica, tiene efectos sobre los precios, tanto contemporáneamente como a lo largo de un n.º de períodos. A su vez, el tipo de interés nominal es la suma del tipo de interés real (que se supone aproximadamente constante), y la tasa esperada de inflación. El sistema anterior sugiere que tanto la tasa de inflación como el tipo de interés nominal dependen: 1) de su propio pasado; 2) de las expectativas de sus valores futuros; 3) de la actuación de la autoridad económica; 4) de shocks exógenos.

El significado de la función objetivo es que se penalizan las desviaciones de las variables de estado de los objetivos prefijados a_1 y a_2, respectivamente.

c) CÁLCULO Y ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN CON DATOS NUMÉRICOS

Con el objeto de llevar a cabo simulaciones numéricas, vamos a concretar los valores de los coeficientes, de los objetivos prefijados y del horizonte temporal:

$$\text{MIN } E_1 W = E_1 \sum_{t=2}^{40} (y_{1t} - 5)^2 + (y_{2t} - 3)^2$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{\circ}_{1,\,t+1/t-1} \\ y^{\circ}_{2,\,t+1/t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,\,t-1} \\ y_{2,\,t-1} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} m_t + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

(para $t = 2, 3, \ldots, 40$)

con $y_{1,1} = 10$

$y_{2,1} = 10$

siendo $\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$: vectores aleatorios normales, de media cero y covarianza I, serialmente incorrelados.

Para el problema dado, hemos simulado las perturbaciones aleatorias, en las condiciones del enunciado, obteniendo para m_t, control óptimo, los valores que aparecen en el gráfico 3, siendo los valores de y_{1t}, y_{2t} del sistema controlado, los que aparecen en el gráfico 4. Hemos utilizado los resultados presentados en apartados anteriores, considerando $\Gamma = I$.

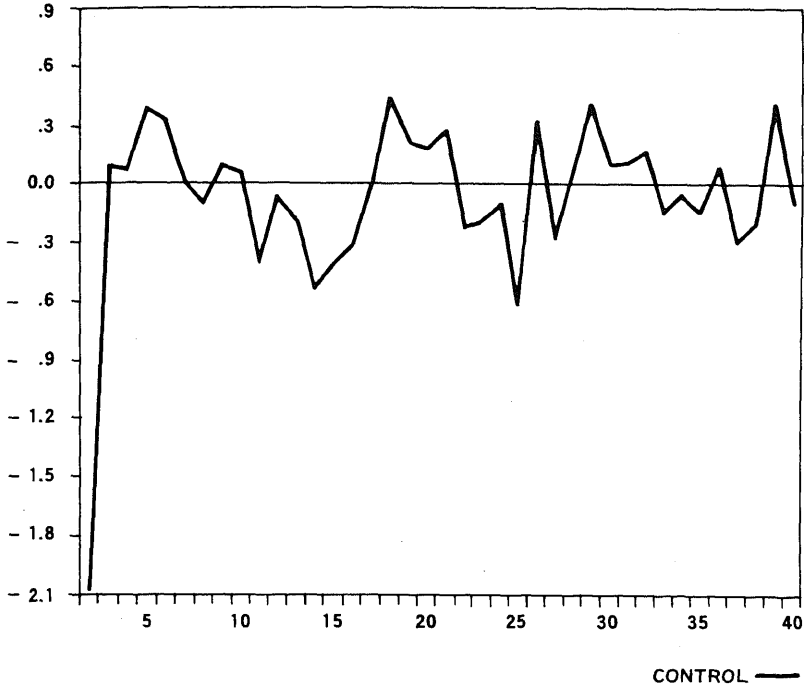


Gráfico 3

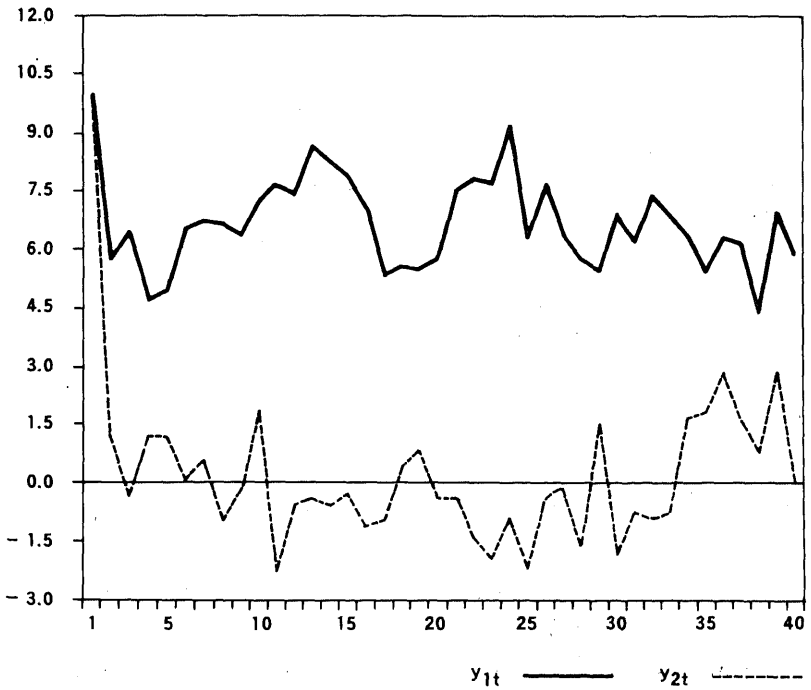


Gráfico 4

La evolución del sistema controlado viene dada por:

$$y_t = P_t y_{t-1} + s_t + u_t$$

en donde las matrices P_t y los vectores s_t vienen determinados por los parámetros del problema. En los listados observamos que se estabilizan en los valores:

$$P = \begin{pmatrix} 0.29 & -0.15 \\ -0.36 & 0.18 \end{pmatrix}; \; a = \begin{pmatrix} 4.61 \\ 2.36 \end{pmatrix}$$

por lo que podemos calcular el estado estacionario (o punto de equilibrio) de la parte determinística del sistema controlado $y_t = Py_{t-1} + s$, obteniendo $\bar{y} = \begin{pmatrix} 6.48 \\ 0.03 \end{pmatrix}$.

Además, los autovalores de P *son* $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0.47$ (son menores que uno en valor absoluto), por lo que el sistema es asintóticamente estable, lo cual quiere decir que cualquiera que sea el estado inicial, el sistema controlado se aproximará al estado estacionario, exceptuando la influencia de las perturbaciones aleatorias.

En los resultados vemos que en el período 2 (el primero en el que se actúa sobre el sistema), el valor de la variable de control es grande, en valor absoluto (hay contracción de la oferta monetaria), con lo que se consigue llevar al sistema cerca del estado estacionario ya en el período 2. En los demás períodos parece que la variable de control sólo contrarresta los valores de las perturbaciones aleatorias (hay acomodación de la oferta monetaria) y el sistema controlado se mantiene en torno al valor que ya alcanzaba en el período 2.

Observamos también, a la vista de los ruidos que hemos obtenido, que desviaciones mayores o menores del estado estacionario se corresponden exactamente con valores mayores o menores de las variables u_t. Por otra parte, hemos hecho otras pruebas para diferentes covarianzas de los vectores u_t, de la forma αI, en lugar de I, notando que el efecto sobre el sistema consiste simplemente en ampliar esas desviaciones si $\alpha > 1$ y disminuirlas si $\alpha < 1$ sin cambiar en lo demás la forma del gráfico.

Se han estudiado también los efectos que tiene sobre la solución la modificación de algunos parámetros del sistema. Comentemos brevemente algunos de los casos analizados que nos han dado resultados interesantes:

i) Caso en que los coeficientes de m_t varían en el tiempo.

Hemos estudiado, *a)* caso en que los coeficientes son $\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{t} \\ 1 + \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ es decir, disminuyen en el tiempo. *b)* Caso en que los coeficientes aumentan en el tiempo, siendo $\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{t} \\ 1 - \frac{1}{t} \end{pmatrix}$. En ambos casos hemos obtenido que el sistema

controlado no cambia con respecto al caso de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que el control óptimo, en este caso es: $m_t' = \frac{1}{C_t} m_t$, siendo m_t, control óptimo para el caso de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y siendo $C_t = 1 + \frac{1}{t}$, en el caso *a)* $C_t = 1 - \frac{1}{t}$, en el caso *b)*.

ii) Caso de que en el sistema no aparecieran expectativas, o lo que es lo mismo, $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0$. Es un problema habitual de optimización dinámica lineal cuadrático. En este caso el sistema es también asintóticamente estable y el estado estacionario es $\bar{y} = \begin{pmatrix} 4.89 \\ 3.22 \end{pmatrix}$. En este caso, a diferencia del original, tiene que haber una expansión monetaria mantenida.

iii) Caso en que hay efectos cruzados entre y_{1t}, y_{2t}. Suponemos que cambiamos la matriz de coeficientes de las expectativas, teniendo ahora $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,

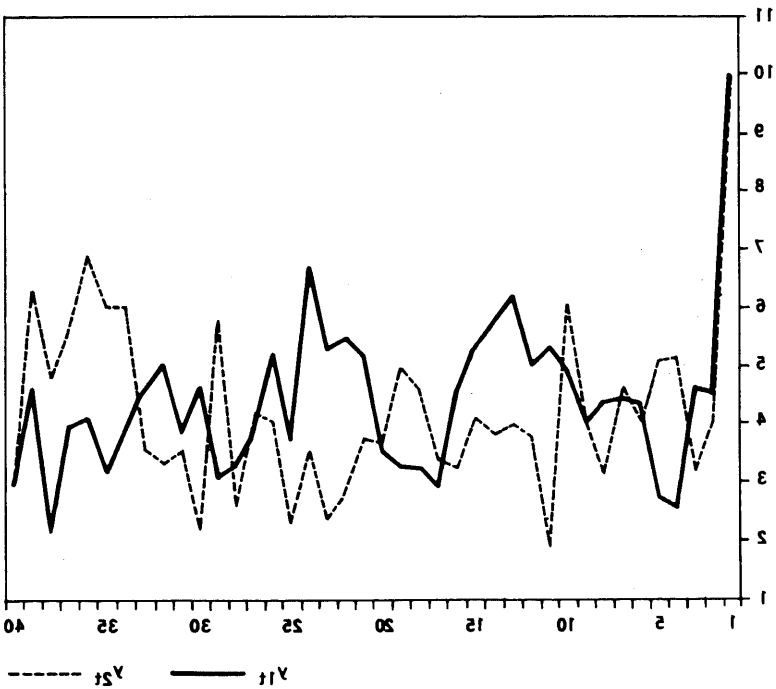


Gráfico 5

en lugar de $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Consideramos las mismas realizaciones de las perturbaciones aleatorias que en el caso inicial obteniendo también una fuerte contracción de la oferta monetaria en el período 2 y acomodación en los demás períodos. En el gráfico 5 tenemos la representación del sistema controlado: se observa que, a diferencia de los casos anteriores, hay gran correlación entre y_{1t}, y_{2t}. Se ve que y_{2t} «va siguiendo» a y_{1t} con un poco de retraso. El estado estacionario es, en este caso, $\bar{y} = \begin{pmatrix} 4.27 \\ 4.18 \end{pmatrix}$, siendo el sistema controlado asintóticamente estable.

7. Conclusiones

En este trabajo se estudia el problema de control óptimo de sistemas lineales con expectativas racionales y función objetivo cuadrática, con horizonte temporal finito. Se ha partido del método que propone Chow para resolver el problema en un caso particular: coeficientes invariantes en el tiempo y sistema estacionario en covarianza al crecer el tiempo, analizando detalladamente algunos problemas de rigor que se observan. Se presenta un método que resuelve el problema que se estudia en el artículo, método que toma ideas del trabajo de Chow, aunque no exige sus condiciones particulares ni presenta sus problemas de rigor. Finalmente se aplica el método para resolver dos problemas económicos concretos.

Hay que señalar que si se plantea el mismo problema pero para el caso de horizonte temporal infinito, problema distinto al que nos ocupa, el trabajo de Chow es generalizable (con los problemas de rigor que se comentan en este artículo) y en cambio el método que se presenta en este trabajo no se ha conseguido generalizar, habiéndolo intentado según diferentes enfoques.

Terminamos diciendo que el análisis efectuado en los dos ejemplos económicos nos sugiere algunos problemas teóricos como: condiciones de controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales con expectativas racionales. ¿En qué condiciones un sistema con expectativas racionales es asintóticamente estable?

Apéndice

Demostración del teorema.

Por inducción sobre t.

PARA $t = T$

$$V_T(y_{T-1}) = E_{T-1}\left[(y_T - a_T)' K_T (y_T - a_T)\right] = E_{T-1}(y_T' K_T y_T - 2y_T' K_T a_T + a_T' K_T a_T) =$$
$$= E_{T-1}(y_T' H_T y_T - 2y_T' h_T + c_T),$$

$$\text{en donde} \begin{cases} H_T = K_T \\ h_T = K_T a_T \\ c_T = a_T' K_T a_T \end{cases}$$

Sustituyendo Y_T por el valor obtenido en [2], queda:

$$\begin{aligned} V_T(y_{T-1}) = E_{T-1}[&(\tilde{B}_{1T} y^*_{T+1/T-1} + \tilde{A}_T y_{T-1} + \tilde{C}_T x^*_{T/T-1} + \tilde{b}^*_{T/T-1} + v_T)' \\ &H_T(\tilde{B}_{1T} y^*_{T+1/T-1} + \tilde{A}_T y_{T-1} + \tilde{C}_T x^*_{T/T-1} + \tilde{b}^*_{T/T-1} + v_T) - \\ &-2(\tilde{B}_{1T} y^*_{T+1/T-1} + \tilde{A}_T y_{T-1} + \tilde{C}_T x^*_{T/T-1} + \tilde{b}^*_{T/T-1} + v_T)' h_T + c_T] = \\ &= (\tilde{B}_{1T} y^*_{T+1/T-1} + \tilde{A}_T y_{T-1} + \tilde{C}_T x^*_{T/T-1} + \tilde{b}^*_{T/T-1})' H_T (\tilde{B}_{1T} y^*_{T+1/T-1} + \\ &+ \tilde{A}_T y_{T-1} + \tilde{C}_T x^*_{T/T-1} + \tilde{b}^*_{T/T-1}) + E_{T-1}(v_T' H_T v_T) - \\ &-2(\tilde{B}_{1T} y^*_{T+1/T-1} + \tilde{A}_T y_{T-1} + \tilde{C}_T x^*_{T/T-1} + \tilde{b}^*_{T/T-1})' h_T + c_T \end{aligned}$$

Condición necesaria de mínimo

$$\frac{\partial V_T}{\partial x^*_{T/T-1}} = 0 = 2\tilde{C}_T' H_T (\tilde{B}_{1T} y^*_{T+1/T-1} + \tilde{A}_T y_{T-1} + \tilde{C}_T x^*_{T/T-1} + \tilde{b}^*_{T/T-1}) - 2\tilde{C}_T h_T$$

$$\Rightarrow \hat{x}^*_{T/T-1} = G_T y_{T-1} + G_{1T} y^*_{T+1/T-1} + g_T$$

$$\text{en donde} \begin{cases} G_T = -(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1} \tilde{C}_T' H_T \tilde{A}_T \\ G_{1T} = -(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1} \tilde{C}_T' H_T \tilde{B}_{1T} \\ g_T = -(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1} \tilde{C}_T' (H_T \tilde{b}^*_{T/T-1} - h_T) \end{cases}$$

(Obsérvese que $g_T = g^*_{T/T-1} \neq g^*_{T/T-j}$, para $j > 1$)

↑

(En general)

Por estar optimizando un programa convexo, la condición es también suficiente de optimalidad global.

Llevando el valor obtenido $\hat{x}^*_{T/T-1}$ al sistema [2], particularizando en T, queda:

$$y_T = R_T y_{T-1} + R_{1T} y^*_{T+1/T-1} + r_T + v_T, \text{ en donde} \begin{cases} R_T = \tilde{A}_T + \tilde{C}_T G_T \\ R_{1T} = \tilde{B}_{1T} + \tilde{C}_T G_{1T} \\ r_T = \tilde{b}^*_{T/T-1} + \tilde{C}_T g_T \end{cases}$$

(Por tanto: $r_T = r^*_{T/T-1} \neq r_{T/T-j}$, para $j > 1$)

↑

(En general)

Al ser $y^*_{T+1/T-1} = \Gamma y^*_{T/T-1}$, queda:

$$y_T = R_T y_{T-1} + R_{1T} \Gamma y^*_{T/T-1} + r_T + v_T$$

Entonces: $y^*_{T/T-1} = R_T y_{T-1} + R_{1T}\Gamma y^*_{T/T-1} + r_T \Rightarrow y^*_{T/T-1} =$

$$= (I - R_{1T}\Gamma)^{-1}\ (R_T y_{T-1} + r_T)$$

$$y_T = y^*_{T/T-1} + v_T = P_T y_{T-1} + s_T + v_T, \text{ con } \begin{cases} P_T = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} R_T \\ s_T = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} r_T \end{cases}$$

(Nota: $s_T = s^*_{T/T-1} \neq s^*_{T/T-j}$, para $j > 1$)

$\uparrow$

(En general)

$$y^*_{T/T-1} = P_T y_{T-1} + s_T \Rightarrow y^*_{T+1/T-1} = \Gamma P_T y_{T-1} + \Gamma s_T$$

Por tanto:

$$\hat{x}^*_{T/T-1} = G_T y_{T-1} + G_{1T}(\Gamma P_T y_{T-1} + \Gamma s_T) + g_T = F_T y_{T-1} + f_T$$

$$\text{en donde } \begin{cases} F_T = G_T + G_{1T}\Gamma P_T \\ f_T = g_T + G_{1T}\Gamma s_T \end{cases}$$

$$\hat{V}_T(y_{T-1}) = (P_T y_{T-1} + s_T)' H_T(P_T y_{T-1} + s_T) + E_{T-1}(v_T' H_T v_T) -$$

$$-2(P_T y_{T-1} + s_T)' h_T + c_T = y'_{T-1} P'_T H_T P_T y_{T-1} - 2y'_{T-1} P'_T(h_T - H_T s_T) +$$

$$+ s'_T H_T s_T - 2s'_T h_T + E_{T-1}(v'_T H_T v_T) + c_T$$

que coincide con la expresión que aparece en el enunciado, particularizada para T, ya que $h_T = h^*_{T/T-1}$ y $c_T = E_{T-1}\ (c_T)$.

Hemos calculado $\hat{x}^*_{T/T-1} = \widehat{E[x_T | I_{T-1}]}$ pero no $\hat{x}_T$ que es lo que nos interesa. A partir del esquema del apartado 2, se ve que cuando se conoce I_{T-1} no ocurre ningún acontecimiento (shock, variable exógena, etc.) antes de que x_T actúe sobre el sistema. Parece lógico, por tanto, que tenga que ser $x_T = x^*_{T/T-1}$ y, por tanto $\hat{x}_T = \hat{x}^*_{T/T-1}$. Además, en este caso, esta identificación no presenta ningún problema matemático, ya que $g_T = g^*_{T/T-1}$. Es decir, hacemos

$$\hat{x}_T = G_T y_{T-1} + G_{1T} y^*_{T+1/T-1} + g_T$$

$\hat{x}^*_{T/T-1} = G_T y_{T-1} + G_{1T} y^*_{T+1/T-1} + g_T$ coincide con $\hat{x}_T$ por ser $g^*_{T/T-1} = g_T$ (sin embargo, en general $\hat{x}_T \neq \hat{x}^*_{T/T-j}$, para $j > 1$, ya que $g_T \neq g^*_{T/T-j}$, para $j > 1$).

Suponemos que el teorema es cierto para t
(según la hipótesis de inducción)

PARA $t-1$

$$V_{t-1}(y_{t-2}) = E_{t-2}[y'_{t-1} K_{t-1} y_{t-1} - 2y'_{t-1} K_{t-1} a_{t-1} + a'_{t-1} K_{t-1} a_{t-1} + \hat{V}_t(y_{t-1})] =$$

$$= E_{t-2}(y'_{t-1} H_{t-1} y_{t-1} - 2y'_{t-1} h_{t-1} + c_{t-1})$$

en donde
$$\begin{cases} H_{t-1} = K_{t-1} + P_t' H_t P_t \\ h_{t-1} = K_{t-1} a_{t-1} + P_t'(h^\circ_{t/t-1} - H_t s_t) \\ c_{t-1} = a_{t-1}' K_{t-1} a_{t-1} + s_t' H_t s_t - 2 s_t' h^\circ_{t/t-1} + E_{t-1}(v_t' H_t v_t) + E_{t-1}(c_t) \end{cases}$$

Podemos poner:

$$V_{t-1}(y_{t-2}) = E_{t-2}[(\tilde{B}_{1,t-1} y^\circ_{t/t-2} + \tilde{A}_{t-1} y_{t-2} + \tilde{C}_{t-1} x^\circ_{t-1/t-2} + \tilde{b}^\circ_{t-1/t-2} + v_{t-1})'$$

$$H_{t-1}(\tilde{B}_{1,t-1} y^\circ_{t/t-2} + \tilde{A}_{t-1} y_{t-2} + \tilde{C}_{t-1} x^\circ_{t-1/t-2} + \tilde{b}^\circ_{t-1/t-2} + v_{t-1}) -$$

$$-2(\tilde{B}_{1,t-1} y^\circ_{t/t-2} + \tilde{A}_{t-1} y_{t-2} + \tilde{C}_{t-1} x^\circ_{t-1/t-2} + \tilde{b}^\circ_{t-1/t-2} + v_{t-1})' h_{t-1} + c_{t-1}] =$$

$$= (\tilde{B}_{1,t-1} y^\circ_{t/t-2} + \tilde{A}_{t-1} y_{t-2} + \tilde{C}_{t-1} x^\circ_{t-1/t-2} + \tilde{b}^\circ_{t-1/t-2})' H_{t-1}$$

$$(\tilde{B}_{1,t-1} y^\circ_{t/t-2} + \tilde{A}_{t-1} y_{t-2} + \tilde{C}_{t-1} x^\circ_{t-1/t-2} + \tilde{b}^\circ_{t-1/t-2}) +$$

$$+ E_{t-2}(v_{t-1}' H_{t-1} v_{t-1}) - 2(\tilde{B}_{1,t-1} y^\circ_{t/t-2} + \tilde{A}_{t-1} y_{t-2} + \tilde{C}_{t-1} x^\circ_{t-1/t-2} +$$

$$+ \tilde{b}^\circ_{t-1/t-2})' h^\circ_{t-1/t-2} + E_{t-2}(c_{t-1})$$

Condición necesaria de mínimo

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x^\circ_{t-1/t-2}} = 0 = 2\tilde{C}_{t-1}' H_{t-1}(\tilde{B}_{1,t-1} y^\circ_{t/t-2} + \tilde{A}_{t-1} y_{t-2} + \tilde{C}_{t-1} x^\circ_{t-1/t-2} +$$

$$+ \tilde{b}^\circ_{t-1/t-2}) - \tilde{C}_{t-1}' h^\circ_{t-1/t-2}$$

$$\Rightarrow \hat{x}^\circ_{t-1/t-2} = G_{t-1} y_{t-2} + G_{1,t-1} y^\circ_{t/t-2} + g_{t-1}$$

, en donde:
$$\begin{cases} G_{t-1} = -(\tilde{C}_{t-1}' H_{t-1} \tilde{C}_{t-1})^{-1} \tilde{C}_{t-1}' H_{t-1} \tilde{A}_{t-1} \\ G_{1,t-1} = -(\tilde{C}_{t-1}' H_{t-1} \tilde{C}_{t-1})^{-1} \tilde{C}_{t-1}' H_{t-1} \tilde{B}_{1,t-1} \\ g_{t-1} = -(\tilde{C}_{t-1}' H_{t-1} \tilde{C}_{t-1})^{-1} \tilde{C}_{t-1}' (H_{t-1} \tilde{b}^\circ_{t-1/t-2} - h^\circ_{t-1/t-2}) \end{cases}$$

(Nota: $g_{t-1} = g^\circ_{t-1/t-2} \neq g^\circ_{t-1/t-j}$, para $j > 2$)

$\uparrow$

(En general)

(Es también condición suficiente, por convexidad)

Sustituyendo el valor obtenido de $\hat{x}^\circ_{t-1/t-2}$ en el sistema particularizado para $t-1$ queda:

$$y_{t-1} = R_{t-1} y_{t-2} + R_{1,t-1} y^\circ_{t/t-2} + r_{t-1} + v_{t-1}$$

$$, \text{ en donde:} \begin{cases} R_{t-1} = \tilde{A}_{t-1} + \tilde{C}_{t-1} G_{t-1} \\ R_{1,t-1} = \tilde{B}_{1,t-1} + \tilde{C}_{t-1} G_{1,t-1} \\ r_{t-1} = \tilde{b}^{*}_{t-1/t-2} + \tilde{C}_{t-1} g_{t-1} \end{cases}$$

$$\text{(Nota: } r_{t-1} = r^{*}_{t-1/t-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(En general)}}}{\neq} r^{*}_{t-1/t-j}, \text{ para } j > 2)$$

Teníamos

$$y_t = P_t y_{t-1} + s_t + v_t$$

$$\Rightarrow y^{*}_{t/t-2} = P_t y^{*}_{t-1/t-2} + s^{*}_{t/t-2}$$

$$y^{*}_{t-1/t-2} = R_{t-1} y_{t-2} + R_{1,t-1} y^{*}_{t/t-2} + r_{t-1} = R_{t-1} y_{t-2} + R_{1,\ t-1} P_t y^{*}_{t-1/t-2} +$$

$$+ R_{1,t-1} s^{*}_{t/t-2} + r_{t-1}$$

$$\Rightarrow y^{*}_{t-1/t-2} = (I - R_{1,t-1} P_t)^{-1} (R_{t-1} y_{t-2} + R_{1,t-1} s^{*}_{t/t-2} + r_{t-1})$$

$$\Rightarrow y_{t-1} = y^{*}_{t-1/t-2} + v_{t-1} = P_{t-1} y_{t-2} + s_{t-1} + v_{t-1}, \text{ en donde:}$$

$$\begin{cases} P_{t-1} = (I - R_{1,t-1} P_t)^{-1} R_{t-1} \\ s_{t-1} = (I - R_{1,t-1} P_t)^{-1} (R_{1,t-1} s^{*}_{t/t-2} + r_{t-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^{*}_{t-1/t-2} = P_{t-1} y_{t-2} + s_{t-1} \Rightarrow y^{*}_{t/t-2} = P_t P_{t-1} y_{t-2} + P_t s_{t-1} + s^{*}_{t/t-2}$$

$$\Rightarrow x^{*}_{t-1/t-2} = G_{t-1} y_{t-2} + G_{1,t-1} (P_t P_{t-1} y_{t-2} + P_t s_{t-1} + s^{*}_{t/t-2}) + g_{t-1} =$$

$$= F_{t-1} y_{t-2} + f_{t-1},$$

$$\text{en donde} \quad \begin{cases} F_{t-1} = G_{t-1} + G_{1,t-1} P_t P_{t-1} \\ f_{t-1} = g_{t-1} + G_{1,t-1} (P_t s_{t-1} + s^{*}_{t/t-2}) \end{cases}$$

$$V_{t-1}(y_{t-2}) = (P_{t-1} y_{t-2} + s_{t-1})' H_{t-1} (P_{t-1} y_{t-2} + s_{t-1}) +$$

$$+ E_{t-2}(v'_{t-1} H_{t-1} v_{t-1}) - 2 (P_{t-1} y_{t-2} + s_{t-1})' h^{*}_{t-1/t-2} +$$

$$+ E_{t-2}(c_{t-1}) = y'_{t-2} P'_{t-1} H_{t-1} P_{t-1} y_{t-2} + 2 y'_{t-2} P'_{t-1} H_{t-1} s_{t-1} +$$

$$+ s'_{t-1} H_{t-1} s_{t-1} + E_{t-2}(v'_{t-1} H_{t-1} v_{t-1}) - 2 y'_{t-2} P'_{t-1} h^{*}_{t-1/t-2} -$$

$$- 2 s'_{t-1} h^{*}_{t-1/t-2} + E_{t-2}(c_{t-1}) = y'_{t-2} P'_{t-1} H_{t-1} P_{t-1} y_{t-2} -$$

$$- 2 y'_{t-2} P'_{t-1} (h^{*}_{t-1/t-2} - H_{t-1} s_{t-1}) + s'_{t-1} H_{t-1} s_{t-1} - 2 s'_{t-1} h^{*}_{t-1/t-2} +$$

$$+ E_{t-2}(v'_{t-1} H_{t-1} v_{t-1}) + E_{t-2}(c_{t-1})$$

Como hemos hecho para el caso T, identificamos $\hat{x}_{t-1} = \hat{x}^{*}_{t-1/t-2}$, lo cual no nos plantea problemas matemáticos por ser $g_{t-1} = g^{*}_{t-1/t-2}$ y, además, parece lógico que así sea ya que para decidir $\hat{x}_{t-1}$ no se va a disponer de más información que la de I_{t-2}.

El teorema queda demostrado.

Referencias

Aoki, M. (1976): *Optimal control and system theory in dynamic economic analysis.* North Holland.

Aoki, M. y Canzoneri, M. (1979): «Reduced forms of rational expectations models». *The Quarterly Journal of Economics,* February, págs. 59-71.

Bertsekas, D. (1976): *Dynamic programming and stochastic control,* Academic Press.

Buiter, W. (1983): «Expectations and control theory». *Economie appliquée, núm. 1,* págs. 129-156.

Chow, G. (1975): *Analysis and control of dynamic economic systems,* John Wiley and sons.

Chow, G. (1980): «Econometric policy evaluation and optimization under rational expectations». *Journal of Economic Dynamic and Control,* Vol. 2, *núm. 1,* págs. 47-59.

Chow, G. (1981): *Econometric analysis by control methods.* John Wiley and sons.

Driffill, E. J. (1981): «Time inconsistency and 'rules vs. discretion' in macroeconomic models with rational expectations», Discussion Papers in Economics and Econometrics, University of Southampton.

Friedman, B. M. (1975): *Economic stabilization policy. Methods in optimization,* North Holland.

Kendrick, D. (1976): «Applications of control theory to macroeconomics», *Frontiers of Quantitative Economics,* Intrilligator (ed.). North Holland.

Kendrick, D. (1981): *Stochastic control for economic models,* McGraw-Hill.

Kendrick, D. (1988): *Feedback: A new approach to macroeconomic policy,* Kluwer Publishing Co.

Kydland y Prescott (1977): «Rules rather than discretion: The inconsistency of optimal plans», *Journal of Political Economy,* Vol. 85, *núm. 3,* págs. 473-491.

Murata, Y. (1982): *Optimal control methods for linear discrete-time economic systems,* Springer-Verlag.

Pindyck, R. S. (1973): *Optimal planning for economic stabilization,* North Holland.

Pitchford y Turnovsky (ed.) (1977): *Applications of control theory to economic analysis,* North Holland.

Sargent, T. (1987): *Dynamic macroeconomic theory,* Harvard University Press.

Abstract

This paper considers the optimal control problem of lineal rational expectation models when the objetive function is quadratic and the horizon is fixed and finite. The hypothesis of causality is not satisfied, and therefore, the standard techniques of control theory can not be directly applied. A method, related to dynamic programming, is presented to solve the problem. The method is illustrated with two economic examples.

Recepción del original, marzo de 1988
Versión final, octubre de 1989