

CONTROL DE SISTEMAS MACROECONOMICOS. ESTUDIO DE UN CASO PARA LA ECONOMIA ESPAÑOLA

Rosa BARBOLLA
J. Patricio GOMEZ

Universidad Complutense de Madrid

En este artículo se trata de ilustrar los resultados de la teoría del control en el espacio de los estados y sus posibles aplicaciones a la Economía Española. En primer lugar, se presenta un resumen de los resultados más recientes de la teoría del control, junto a nuevas demostraciones de algunos teoremas clásicos, basados en el concepto de autovalor de una matriz asociado a un subespacio invariante de una aplicación lineal. Dado que el modelo elegido para ilustrar las aplicaciones de la Teoría del Control es de entradas múltiples, se generalizan los teoremas de colocación y separación de autovalores para el caso de un sistema de entradas múltiples con un observador de orden reducido, teniendo en cuenta la definición de forma normal natural de una matriz cuadrada. En segundo lugar, se estima un modelo macroeconómico, propuesto por McFadden, a partir de datos reales de la economía española, que se utiliza para mostrar las posibles aplicaciones económicas de la Teoría del Control. Se comentan algunas modificaciones que deberían ser introducidas en el modelo si se pretende dotar de algún sentido a las decisiones de política económica basadas en el mismo.

1. Introducción

No parece adecuado aceptar que todas las técnicas matemáticas desarrolladas inicialmente para ser aplicadas a la física o a la ingeniería sean susceptibles de serlo también a las ciencias sociales en general y a la economía en particular. Un ejemplo lo constituye la moderna Teoría del Control, ya que, por la naturaleza de los fenómenos estudiados en economía, no siempre son transferibles los resultados de controlabilidad y observabilidad de sistemas físicos al estudio de sistemas sociales. En efecto, desde el punto de vista del Control Óptimo un sistema físico es un juego con un único jugador contra la naturaleza; por el contrario en un sistema económico pueden existir varios jugadores, los cuales a menudo compiten entre sí y persiguen intereses contrapuestos. Ignorar las reacciones de unos agentes económicos frente a las acciones tomadas por otros puede conducir a falsear resultados y decidir adoptar políticas equivocadas. Por otra parte no se puede olvidar que un sistema físico reacciona teniendo en cuenta únicamente la información pasada o presente, mientras que los agentes económicos deciden lo que deben hacer hoy de acuerdo con la información pasada y presente y también de acuerdo con las expectativas del comportamiento del sistema en el futuro. Sin embargo, la moderna Teoría del Control se puede aplicar al diseño de políticas económicas adecuadas introduciendo en los métodos de Control Óptimo modificaciones que recojan las diferencias sustanciales entre el comportamiento de un sistema físico y uno económico.

La Teoría de Sistemas se apoya en el conocimiento y desarrollo de diversos campos como son la modelización y el análisis de sistemas, su control y modificación, etc. En economía, la imposibilidad de especificar en general relaciones que suplan la ausencia de leyes físicas que rijan el comportamiento de un sistema económico, conlleva la necesidad de utilizar los datos estadísticos disponibles, así como especificar las entradas y salidas del sistema para llevar a cabo la identificación y ser capaces de plantear el modelo en forma matricial (en el espacio de los estados). Entonces, cuando el modelo es lineal, la teoría de matrices permitirá obtener soluciones analíticas y estudiar si éste es controlable y observable y, de acuerdo con estas características, analizar si es posible conducir el sistema a la situación deseada eligiendo de forma adecuada el vector de entradas.

Con objeto de ilustrar la aplicación de los resultados de la teoría de control a la economía, hemos elegido un modelo macroeconómico, propuesto por McFadden en 1969, que es controlable sólo cuando se utilizan conjuntamente instrumentos de política monetaria y fiscal como variables de control, pero no lo es cuando sólo se utiliza una de ellas como instrumento.

La elección del modelo la hemos hecho teniendo en cuenta su sencillez, lo que permite mostrar con claridad las posibilidades de aplicación de la Teoría del Control en la economía aunque bien es cierto que, precisamente por su sencillez, no es posible extrapolar los resultados al estudio del comportamiento de una economía real. En el epígrafe 3 se estima este modelo a partir de datos de la economía española. Tras analizar en qué condiciones es controlable y observable, se simula su comportamiento al controlarlo en bucle abierto y en bucle cerrado, interpretando las ventajas e inconvenientes que presentan ambos enfoques y cómo se resuelven los problemas que se plantean. Se prueba que en este caso es posible controlar el sistema incluso cuando se dispone de la información relevante con un período de retraso y por último se simula el comportamiento del sistema en diferentes supuestos de control con política monetaria y fiscal.

Dado que el modelo propuesto es un modelo de entradas múltiples, era preciso generalizar el Teorema de Colocación de los autovalores (Luenberger (1979) pág. 293), que hace uso de las formas canónicas de Controlabilidad y que es aplicable únicamente al caso de un sistema de entrada única. Por otra parte, el observador a introducir en nuestro caso para reconstruir los valores de las variables de estado a partir de la información contenida en las salidas del sistema es un observador de orden reducido, por lo que era preciso también demostrar el Teorema de Separación de los autovalores, demostrado por Luenberger (1979), pág. 299, para el observador identidad, para un observador de orden reducido.

Por estas razones, en el párrafo 2.2. se generaliza el Teorema de Colocación para el caso de entradas múltiples (Teorema 3) haciendo uso del concepto de forma normal natural de una matriz cuadrada (Barbolla y Gómez (1985)) y se demuestra el Teorema de Separación para un observador de orden reducido (Teorema 4).

2. Notación, conceptos y resultados previos

Estamos interesados en estudiar el comportamiento de un sistema lineal en tiempo discreto formulado en forma expandida en el Espacio de los Estados como:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad [1]$$

siendo $y(k) = Cx(k)$ la expansión del sistema (véase gráfico A1). Esta estructura de salida es necesaria porque la mayoría de las veces no podemos medir el vector de estado sino una transformación de él.

Supuesto que por $x(k)$, vector de dimensión $n \times 1$, notamos el vector de estado en el período k , por $\{x(k)/k \in \mathcal{N}\}$ notaremos la sucesión que es la trayectoria solución de [1]. Si además por $u(k)$, vector de dimensión $m \times 1$, notamos el vector de variables instrumento o variables de control en el período k y por $y(k)$, de dimensión $p \times 1$, el de las observaciones o salidas, la matriz cuadrada A de orden n será la del sistema, la matriz B , de orden $n \times m$, la de distribución de las entradas y C , de orden $p \times n$, la matriz que distribuye las salidas.

De estos sistemas por los ya conocidos teoremas de existencia y unicidad, conocemos la solución para unas condiciones iniciales $x(0)$.

Para dichas condiciones iniciales $x(0)$, la solución del sistema homogéneo en el período k es $x(k) = A^k x(0)$. Es decir, $\{A^k x(0)/k \in \mathcal{N}\}$ es la solución del sistema cuando $u(k) = 0$, o lo que es lo mismo la respuesta libre del sistema cuando no existe vector de entradas o variables instrumento. Si $u(k)$ es no nulo, la solución del sistema para las condiciones iniciales $x(0)$ será (gráfico A2, apartado b):

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} B u(l)$$

donde el segundo sumando representa la *Superposición* de efectos sobre $x(k)$ debido a las entradas $u(0) \dots u(k-1)$.

Es decir, para todo k , $k \in \mathcal{N}$, $x(k)$ será de la forma:

$$\begin{aligned} x(k) &= A^k x(0) + A^{k-1} B u(0) + \dots + B u(k-1) = \\ &= A^k x(0) + [B \ AB \ \dots \ A^{k-1}] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = \\ &= A^k x(0) + P \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde P es la matriz del efecto de superposición de las entradas.

Puesto que se trata de conformar la trayectoria $x(t)$ solución de un sistema para unas condiciones iniciales $x(0)$ cuando esto sea posible, es decir cuando el sistema sea controlable, empezaremos por definir lo que entendemos por un sistema controlable.

El sistema puede controlarse en bucle abierto o en bucle cerrado. Que un sistema sea controlado en bucle abierto significa que si conocemos el sistema, es posible calcular $u(k)$ (si es controlable) y comparar $x(k)$ y la trayectoria deseada $\bar{x}(k)$ (si es observable); sin embargo, las desviaciones no tienden a amortiguarse porque $u(k)$ está calculado en ausencia de perturbaciones y no introduce información sobre dichas desviaciones.

Por el contrario controlar en bucle cerrado implica que si $x(k)$ es la trayectoria correspondiente a unas condiciones iniciales $x(0)$ y $\bar{x}(k)$ es la trayectoria deseada, siendo observable el sistema, y calculamos $u(k)$, vector de variables instrumento, introduciendo la información sobre las perturbaciones para amortiguar las desviaciones, la trayectoria tenderá hacia la trayectoria deseada a largo plazo. Si no podemos medir $x(k)$, lo primero que tendremos que hacer es construir un observador que aproxime $x(k)$ cuando esto sea posible, es decir, si el sistema es observable. Por tanto estamos interesados en estudiar la observabilidad y controlabilidad de un sistema dinámico.

La Teoría Clásica del Control, de la que las transformadas Z y de Laplace son instrumentos básicos, facilita el diseño de sistemas de control al permitir la resolución de sistemas complejos por descomposición en los subsistemas que lo componen. La Teoría Moderna del Control se apoya en la formulación matricial que nos permite trabajar en el espacio de los estados. Esta teoría proporciona una estructura válida para una búsqueda objetiva y sistemática de políticas económicas adecuadas que confieran propiedades aceptables de estabilidad, y comportamiento oscilatorio a los sistemas económicos.

2.1. *Sistemas controlables y observables en tiempo discreto*

En algunos casos, dado un sistema económico dinámico, es posible diseñarlo o actuar sobre él de tal forma que el vector de estado, a partir de un cierto período n_0 tome unos valores dados y en otros casos esto no es posible.

A continuación definimos lo que se entiende por que un sistema dinámico sea controlable en tiempo discreto.

Definición 1. Dado el sistema en tiempo discreto [1], diremos que es de estado controlable si y sólo si para cualquier condición inicial $x(0) = x_0$, y cualquiera que sea el vector de estado x_1 existe un número finito de períodos n_0 y una función o vector control $u(k)$ tal que aplicando al sistema las entradas $u(0) \dots u(n_0 - 1)$ obtenemos $x(n_0) = x_1$.

Definición 2. A la matriz P_n de orden $n \times (n \cdot m)$ definida por

$$P_n = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

la llamaremos matriz de controlabilidad del sistema [1].

Como $x(k)$ es un vector $n \times 1$, será necesario para que el sistema sea controlable poder actuar sobre todas las componentes de este vector, por lo que intuitivamente parece necesario que la matriz de controlabilidad P_n sea de rango n para poder conformar la trayectoria solución del sistema correspondiente a unas condiciones iniciales. Este resultado queda recogido en el siguiente Teorema.

Teorema 1. La condición necesaria y suficiente para que el sistema

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k)$$

sea controlable es que su matriz de controlabilidad sea de rango n (Luenberger (1979), págs. 276-279).

Si el sistema es de entrada única, es decir disponemos de una única variable instrumento para controlar el sistema, la matriz de controlabilidad P_n será cuadrada de orden n , por tanto, la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea controlable es que los vectores $b, Ab \dots A^{n-1}b$ sean linealmente independientes. Supuesto que el vector b tiene todas sus componentes no nulas, una condición suficiente para que esos n vectores sean independientes es que todos los autovalores de A sean distintos.

Cuando el sistema no es de entrada única (B de orden $n \times m$ con $m > 1$) para que éste sea controlable por una sólo variable instrumento bastará con que lo sea el de entrada única

$$x(k + 1) = Ax(k) + b_j u_j(k)$$

donde por b_j notamos la columna j -sima de la matriz B y por $u_j(k)$ la componente j -sima del vector $u(k)$.

Este criterio de controlabilidad de un sistema se debe a Preston (1974), es conocido con el nombre de *criterio de ajuste* y permite controlar un sistema con un número de variables de control menor que el número de componentes del vector de estado; recordemos que esto no era posible en el criterio de control estático enunciado por Tinbergen.

Pero, ¿cuál es el mínimo número de variables instrumento que nos permite controlar un sistema cuando A es una matriz que tiene todos los autovalores distintos? Como sabemos, si existe una columna de la matriz B , b_j , que no es ortogonal a ningún autovector izquierdo, basta con $u_j(k)$ como variable instrumento para que el sistema sea controlable.

Supongamos que no existe ninguna columna b_j de la matriz B verificando esta propiedad. Entonces si la matriz A tiene todos sus autovalores distintos, la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea controlable es que exista alguna combinación lineal de vectores columna de B , B_j , tal que existan n escalares $\alpha_1 \dots \alpha_n$ todos no nulos verificando que

$$B_j = \sum_1^n \alpha_i e_i$$

siendo e_i ($i = 1 \dots n$), n autovectores derechos de A linealmente independientes.

Cuando un autovalor de A es múltiple, para que el sistema sea controlable por una sola variable instrumento es necesario asociar a ese autovalor un subespacio estable de dimensión igual al orden de multiplicidad del autovalor, pero que no se pueda escribir como suma directa de subespacios estables por la transformación. Es decir, si suponemos, sin pérdida de generalidad, que λ_1 es el único autovalor múltiple de A , y m_1 es su orden de multiplicidad, deberá verificarse que la dimensión del subespacio invariante asociado a este autovalor sea uno y la caja de Jordan de orden $m_1 \times m_1$. Para que el sistema sea controlable por una sola variable instrumento es necesario y suficiente que $u_i^T b_j \neq 0$, $i = m_1 \cdots n$, donde por u_i^T notamos los autovectores izquierdos de A y por b_j la columna j -sima de la matriz B .

Definición 3. Dado el sistema en tiempo discreto [1] diremos que es observable, si conocida la salida $y(k)$ existe un número finito de períodos n_0 tales que para el output dado $y(k)$ se puede determinar de forma única $x(0) = x_0$.

Definición 4. A la matriz R_n de orden $n \times (n \cdot p)$ definida por

$$R_n = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]$$

la llamaremos matriz de observabilidad del sistema [1].

Puesto que la información del comportamiento de $x(k)$ la conocemos a través del vector de salidas $y(k)$ de orden $p \times 1$, parece intuitivo imponer que la matriz de controlabilidad tenga rango n para poder reconstruir de forma única el vector de estado que tiene n componentes. Este resultado quedará recogido en el siguiente Teorema.

Teorema 2. La condición necesaria y suficiente para que el sistema [1] sea observable es que la matriz de observabilidad del sistema sea de rango n (Luenberger (1979), págs. 286-287).

2.2. Descomposición del problema de control

a) TEOREMA DE COLOCACIÓN DE LOS AUTOVALORES: CONTROL EN BUCLE CERRADO

Como ya hemos señalado anteriormente, el objetivo del control es «manipular» las variables instrumento o de entrada del sistema para obtener el comportamiento deseado de las variables de estado.

Cuando las variables instrumento están definidas a priori como función del tiempo (control en bucle cerrado), no es posible tener en cuenta las variaciones no anticipadas en los parámetros o en la forma funcional del sistema, ni las perturbaciones no medibles. Así, tanto las características de estabilidad como el comportamiento oscilatorio del sistema controlado, estarán determinadas por las del sistema original, es decir, sin controlar. Sin embargo, veremos cómo es posible modificar estas características en el sistema controlado cuando las varia-

bles instrumento o entradas están definidas en función de la información disponible sobre el comportamiento del sistema (control en bucle cerrado). En ese caso, es posible introducir información en las entradas del sistema sobre las perturbaciones que afectan o pueden afectar al sistema y que se traducen en desviaciones de las trayectorias de estado respecto de las trayectorias deseadas (gráficos A3 y A4).

Los resultados siguientes que enunciarnos para tiempo discreto, nos proporcionan condiciones para que un sistema controlable de características de estabilidad y oscilación dadas se pueda transformar en otro cuyas características sean las deseadas.

Teorema 3. Sea $x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k)$ un sistema controlable. Entonces, si B es una matriz de orden $n \times m$ cuyo rango es $p \leq \min \{n, m\}$, para todo polinomio real de grado n $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, existe una matriz real C de orden $p \times n$ tal que el polinomio característico de la matriz $A + BC$ coincide con $P(\lambda)$, es decir¹:

$$|(A + BC) - \lambda I| = P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Así, cuando el vector de estado $x(k)$ es conocido para todo k , es posible elegir el vector de variables instrumento $u(k) = Cx(k)$ de forma que los autovalores del sistema controlado en bucle cerrado estén colocados arbitrariamente en el plano complejo, lo que determinará las características de estabilidad y oscilación de las soluciones del sistema. Esto equivale a decir que, para un sistema controlado en bucle cerrado, que en forma matricial podemos escribir como

$$x(k + 1) = (A + BC)x(k)$$

es posible obtener las características deseadas de estabilidad y oscilación de las soluciones eligiendo la matriz C de forma adecuada.

b) OBSERVADORES IDENTIDAD Y DE ORDEN REDUCIDO (Gráficos A5 y A6)

Generalmente no todas las variables de estado del sistema son observables, por tanto, será necesario desarrollar procedimientos que nos permitan controlar el sistema con una aproximación construida a partir de la información disponible. Recordemos que, dado el sistema ampliado, que en tiempo discreto escribíamos

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

si la matriz C no es la identidad, no conocemos directamente el vector de estado $x(k)$ sino una transformación de él: $y(k) = Cx(k)$. Por tanto, el problema que se

¹ Véase Luenberger (1979), págs. 299-300, para sistemas de entrada única y Barbolla y Gomez (1985) para sistemas de entradas múltiples.

debe abordar en primer lugar en este caso será el de reconstruir $x(k)$, para lo cual diseñaremos un dispositivo llamado observador que en ciertas condiciones permitirá calcular una aproximación del estado del sistema.

Si el sistema es completamente observable, el observador definido por

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Az(k) + EC[x(k) - z(k)] + Bu(k) = \\ &= Az(k) + E[y(k) - Cz(k)] + Bu(k) \end{aligned}$$

que se denomina observador identidad, es tal que, si $x(0) = z(0)$, entonces $z(k) = x(k)$, $\forall k > 0$; sin embargo, si $z(0) \neq x(0)$ tendremos que $z(k) \neq x(k)$. Si $\varepsilon(k) = z(k) - x(k)$ es el vector de errores para cada k , dado que se cumple

$$\varepsilon(k+1) = [A - EC]\varepsilon(k) \quad [2]$$

que los errores tiendan o no a anularse con el tiempo ($\varepsilon(k) \rightarrow 0$ si $k \rightarrow +\infty$) dependerá de que el sistema [2] sea o no asintóticamente estable, es decir de los autovalores de la matriz $[A - EC]$.

Por el Teorema de colocación de los autovalores tendremos que, si el sistema [1] es observable, se puede construir un observador identidad de tal forma que es factible elegir las raíces del polinomio característico de la matriz $[A - EC]$.

El observador identidad reconstruye las n variables de estado sin tener en cuenta que p de ellas pueden ser conocidas y por tanto carece de sentido aproximarlas. En este caso se tratará de diseñar un observador de orden $n - p$ que reconstruya sólo las $n - p$ variables no conocidas, eliminando redundancias.

Si el sistema [1] es observable y $rg(C) = p$, es decir, las medidas de las p variables son linealmente independientes, es posible definir una matriz \bar{P} no singular de orden $n \times n$, $\bar{P} = \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix}$, tal que $\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \bar{P}x(k)$ para todo k . Si el sistema transformado, algebraicamente equivalente al de partida, lo escribimos como sigue

$$\begin{bmatrix} w(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

y hacemos $v(k) = w(k) - Ey(k) = [V - EC]x(k)$ el nuevo sistema que obtenemos transformado de éste será: (Luenberger (1979) pág. 305)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} - EA_{21} & A_{11}E - EA_{21}E + A_{12} - EA_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} B_1 - EB_2 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \end{aligned}$$

Puesto que $y(k)$ es conocido para todo k , únicamente será necesario construir un observador trivial (Luenberger (1979) pág. 301) reducido (de orden $n - p$) como sigue:

$$z(k + 1) = [A_{11} - EA_{21}]z(k) + \begin{bmatrix} A_{11}E - EA_{21}E - EA_{22} \\ B_1 - EB_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

siendo la trayectoria del error en la observación la solución del sistema

$$\varepsilon(k + 1) = [A_{11} - EA_{21}]\varepsilon(k) \quad \text{con} \quad \varepsilon(k) = v(k) - z(k)$$

Por tanto, el comportamiento de $\varepsilon(k)$ dependerá de que este sistema sea o no asintóticamente estable, es decir de los autovalores de la matriz $[A_{11} - EA_{21}]$. Ahora bien, el Teorema de Colocación de autovalores nos asegura que se puede elegir la matriz E de tal forma que para un polinomio $P(\lambda)$ arbitrario $|(A_{11} - EA_{21}) - \lambda I| = P(\lambda)$. Por tanto, es posible elegir convenientemente los autovalores del observador y estimar el estado original como

$$\begin{aligned} \hat{w}(k) &= z(k) + Ey(k) \\ \hat{y}(k) &= y(k) \end{aligned}$$

c) **TEOREMA DE SEPARACIÓN DE LOS AUTOVALORES:
CÁLCULO DEL OBSERVADOR Y CONTROL DE UN SISTEMA**

Supongamos el sistema ampliado en tiempo discreto [1] observable y controlable, tal que C es una matriz de orden $p \times n$ de rango p , es decir, del sistema de orden n conocemos p variables ($p \leq n$). Si $p = n$, puesto que $x(k)$ es conocido para todo k , la estructura de realimentación del sistema se podría diseñar de tal forma que

$$u(k) = K_c x(k)$$

de modo que el sistema transformado

$$x(k + 1) = (A + BK_c)x(k)$$

eligiendo adecuadamente la matriz K_c tenga las características de estabilidad y oscilación deseadas, por ejemplo, asintóticamente estable y oscilante.

Si $p < n$, habrá que diseñar un observador que permita aproximar el vector $x(k)$ por $z(k)$. Por el Teorema de Colocación de los autovalores también es posible elegir el polinomio característico del observador.

El Teorema de separación de los autovalores permitirá integrar el diseño del control y del observador de un sistema de tal forma que si un sistema de orden n es controlable y observable, el sistema transformado obtenido introduciendo el

control en bucle cerrado y el observador de orden reducido es tal que su polinomio característico es el producto de los polinomios característicos del control y del observador.

Teorema 4. Dado el sistema

$$x(k + 1) = Ax(k) + bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

controlable y observable, existen matrices E y K_c tales que si tomamos

$$z(k + 1) = [A - EC]z(k) + [E]B \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

$$u(k) = K_c z(k)$$

el sistema transformado resultante es tal que su polinomio característico es el producto de los polinomios característicos de las matrices del sistema controlado y del observador $(A + BK)$ y $(A - EC)^2$.

De este resultado se deduce que es posible separar el cálculo del observador y del control e integrarlos posteriormente, lo que permitirá resolver, en lugar de un sólo sistema de orden $2n - p$, dos de orden $n - p$ y n respectivamente.

3. Estudio de controlabilidad y observabilidad de un modelo macroeconómico

En este parágrafo ilustraremos los resultados de la Teoría del Control enunciados en el anterior apartado; para ello hemos elegido un modelo macroeconómico propuesto por McFadden en 1969 (Aoki (1976) pág. 237). Este modelo, por su sencillez, no permitirá extrapolar los resultados al estudio del comportamiento real de una economía nacional aunque por ejemplo, en el caso de la economía española, se estima el modelo a partir de datos procedentes del anuario del I.N.E. o de la memoria del Banco de España. Sin embargo, muestra con bastante claridad las posibilidades de aplicación de la Teoría del Control en la economía ya que resalta cómo el modelo no es controlable cuando se utilizan sólo instrumentos de política monetaria o política fiscal y como, sin embargo, utilizando conjuntamente instrumentos de política monetaria y fiscal es posible imponer una determinada trayectoria al vector de estado. Aunque en este modelo las variables de estado son directamente medibles, es más adecuado suponer que tanto el saldo neto de la balanza de pagos como la oferta lo son con un retardo, por lo que estudiaremos también cuál es el efecto sobre la observabilidad del sistema de disponer de las variables de estado retardadas, como únicas salidas.

² Véase Luenberger (1979), págs. 307-308 para sistemas de entrada única con observador identidad, y Barbolla y Gomez (1985) para sistemas de entradas múltiples con observador de orden reducido.

Estimando el modelo a partir de una adaptación de datos de la economía española, se estudian las ventajas e inconvenientes que representa el controlar este modelo en bucle abierto o bucle cerrado.

3.1. Enunciado del problema

McFadden propone un modelo definido por cuatro identidades contables y cuatro ecuaciones de comportamiento de corte keynesiano (gráfico A7).

Las identidades contables y ecuaciones de comportamiento que lo definen son las siguientes:

Identidades contables

$$Y(k) = C(k) + S(k) + T(k)$$

$$X(k) = C(k) + I(k) + K(k) + G(k)$$

$$B(k) = E - M(k) - K(k)$$

$$B(k) = Y(k) - X(k)$$

Ecuaciones de comportamiento

$$S(k) = -\alpha_0 + \alpha_1 Y(k) \quad (\alpha_1 > 0)$$

$$M(k) = -\beta_0 + \beta_1 Y(k) \quad (\beta_1 > 0)$$

$$I(k) = \gamma_0 - \gamma_1 r(k) \quad (\gamma_1 > 0)$$

$$K(k) = \delta_0 - \delta_1 r(k) \quad (\delta_1 > 0)$$

siendo las variables del modelo agregadas, $Y(k)$ el PIB, $X(k)$ la demanda, $C(k)$ el consumo privado, $S(k)$ el ahorro, $I(k)$ la inversión, $M(k)$ las importaciones de bienes y servicios, $K(k)$ el flujo neto de capital exterior, $T(k)$ los impuestos, $G(k)$ el gasto público, $B(k)$ el saldo neto de balanza de pagos, E las exportaciones de bienes y servicios, $r(k)$ la tasa de interés interna, y r_f la tasa de interés exterior.

Eliminando las variables $C(k)$, $S(k)$, $T(k)$, $I(k)$, $K(k)$, $G(k)$, E , $M(k)$, $X(k)$, obtenemos un sistema de dos ecuaciones en diferencias de primer orden de coeficientes constantes no homogéneo:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (n = 2)$$

donde $A = I$ es la matriz del sistema,

$$B = \begin{bmatrix} \delta_1 + \mu\beta_1\gamma_1 - \mu\beta_1 \\ -\mu\gamma_1 & \mu \end{bmatrix}$$

con $\mu = \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1}$ es la matriz de reparto de entradas, $x(k) = \begin{Bmatrix} B(k) \\ r(k) \end{Bmatrix}$ el vector de estado y $\mu(k) = \begin{Bmatrix} \Delta r(k) \\ \Delta D(k) \end{Bmatrix}$ el vector de control donde $\Delta r(k) = r(k+1) - r(k)$ es una medida de política monetaria y $\Delta D(k) = D(k+1) - D(k)$ si $D(k)$ es el déficit interno ($D(k) = G(k) - T(k)$) es una medida de política fiscal.

En lo que sigue, estudiaremos el comportamiento del sistema referido a unas condiciones de equilibrio en relación con las características de estabilidad del mismo. Puesto que el sistema es marginalmente estable, un objetivo razonable sería estabilizar el sistema de forma que tendiera rápidamente a un punto de equilibrio (o en su caso a una senda de equilibrio) sin oscilaciones, cuando por efecto de las perturbaciones externas el vector de estado se separase de dicho punto (o senda). Por ello, estudiaremos en primer lugar sus características de controlabilidad y observabilidad.

3.2. Controlabilidad y observabilidad

a) CONTROLABILIDAD

Si el único instrumento disponible es $\Delta r(k)$, tendremos $x(k+1) = Ax(k) + b_r \Delta r(k)$ donde:

$$b_r = \begin{Bmatrix} \delta_1 + \mu\beta_1\gamma_1 \\ -\mu\gamma_1 \end{Bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad M_r será $M_r = [b_r, Ab_r] = [b_r, b_r]$. Como $rg M_r = 1 < 2 = n$, el sistema no será controlable cuando sólo disponemos de esta variable de control de política monetaria (Teorema 1).

Si suponemos que la única variable instrumento disponible es de política fiscal, tendremos $u(k) = \Delta D(k)$ y por tanto $x(k+1) = Ax(k) + b_D \Delta D(k)$, donde $b_D = \begin{Bmatrix} -\mu\beta_1 \\ \mu \end{Bmatrix}$.

La matriz de controlabilidad M_D , $M_D = [b_D, Ab_D] = [b_D, b_D]$, también tiene rango uno y tampoco en este caso el sistema será controlable. Si ahora suponemos que para controlar el sistema es posible disponer de ambas variables tendremos:

$$x(k+1) = Ax(k) + B \begin{Bmatrix} \Delta r(k) \\ \Delta D(k) \end{Bmatrix} \quad \text{donde} \quad B = \begin{bmatrix} \delta_1 + \mu\beta_1\gamma_1 & -\mu\beta_1 \\ -\mu\gamma_1 & \mu \end{bmatrix}$$

y la matriz de controlabilidad $M = [B, AB] = [B, B]$.

Para que el sistema sea controlable es necesario y suficiente que $r_g(M) = 2$ (Teorema 1), lo que equivale a que B sea no singular, es decir que $\delta_1 \neq 0$. Por tanto, el sistema será controlable en este caso si el flujo neto de capital del exterior es sensible a los cambios en la diferencia de las tasas de interés.

En este caso, podemos elegir los autovalores del sistema controlado en Bucle cerrado eligiendo adecuadamente la matriz de control lineal K_c (Teorema de colocación de los autovalores):

$$x(k+1) = (A + BK_c)x(k) \quad \text{tomando} \quad u(k) = \begin{Bmatrix} \Delta r(k) \\ \Delta D(k) \end{Bmatrix} = K_c x(k)$$

puesto que los valores de las variables de estado están disponibles en el instante k .

b) OBSERVABILIDAD

Para poder controlar el sistema eligiendo K_c es necesario conocer las variables de estado en el instante k , o bien aproximarlas si sólo están disponibles con algún retardo.

Si las salidas observadas en cada instante k son directamente las variables de estado, es decir $y(k) = Cx(k)$ con $C = I$, la matriz de observabilidad S ,

$$S = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$$

tiene rango dos ($rg(S) = 2 = n$) y, por tanto, el sistema es observable.

Si ahora suponemos que las variables de estado sólo las conocemos con un retardo de un período, tendremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= x(k-1) \end{aligned}$$

que puede transformarse en uno de cuarto orden

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ I & | & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (n = 4) \\ y(k) &= [0|I] \begin{Bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Como $C^T = [0|I]$, $A = \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ I & | & 0 \end{bmatrix}$ y $A^2 = A^3 = \dots = A^k = A$, para todo k , $C^T A^k = [I|0]$ y, por tanto, la matriz de observabilidad S será

$$S = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \\ C^T A^2 \\ C^T A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & | & I \\ I & | & 0 \\ I & | & 0 \\ I & | & 0 \end{bmatrix}$$

De donde se deduce que el sistema es observable puesto que $rg(S) = 4 = n$.

Así, por el Teorema de separación de los autovalores, podemos descomponer el problema de calcular el control y el observador y transformar el sistema original, que es marginalmente estable, en un sistema controlado que sea asintóticamente estable; para ello definimos el control

$$u(k) = K_c \begin{Bmatrix} \hat{w}(k) \\ y(k) \end{Bmatrix} \quad \text{donde} \quad \hat{w}(k) \quad , \quad \hat{w}(k) = z(k) + Ey(k)$$

es la aproximación del vector de estado, $z(k)$ el vector de estado del observador y

$$z(k+1) = (I - E)z(k) + Bu(k) + (I - E)E y(k) \quad (n = 2)$$

el observador de orden reducido.

El sistema controlado con el observador es entonces un sistema de sexto orden (recordemos que el sistema expandido es de orden 4 y el observador reducido de orden 2).

Si hacemos el cambio de variables $\begin{Bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{Bmatrix} z(k)$ por $\begin{Bmatrix} \hat{w}(k) \\ y(k) \end{Bmatrix} \varepsilon(k)$ donde $\varepsilon(k)$, $\varepsilon(k) = x(k) - \hat{w}(k)$, es el error en la aproximación del vector de estado $x(k)$, tenemos el sistema de sexto orden

$$\begin{Bmatrix} \hat{w}(k+1) \\ y(k+1) \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} K_c \right) \begin{Bmatrix} \hat{w}(k) \\ y(k) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix} \varepsilon(k)$$

$$\varepsilon(k+1) = [I - E]\varepsilon(k)$$

cuyos autovalores son los de las matrices $[I - E]$, $\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} K_c$ por ser triangular por cajas.

El criterio a utilizar será elegir E y K_c de forma que los autovalores del sistema estén contenidos dentro del círculo unidad y sean reales, para que el sistema sea asintóticamente estable y no existan oscilaciones.

3.3. Control en bucle abierto y en bucle cerrado (Gráfico A8)

El control en bucle abierto presenta algunas desventajas frente al control en bucle cerrado (realimentación). En efecto, el control en bucle abierto de un sistema: (a) requiere cálculos complicados para definir el control que se debe aplicar en un caso general; (b) no introduce información sobre las perturbaciones en los parámetros del sistema o en la forma funcional, ni sobre las entradas perturbadoras (ruido) y por tanto, éstas no pueden ser compensadas automáticamente en un sistema así controlado; y (c) no es posible modificar el polinomio característico del sistema original y por tanto las características de estabilidad del mismo son invariantes por la aplicación de este tipo de control.

En el modelo de McFadden, estimado con datos del período 1970-1980 procedentes de la Contabilidad Nacional y Memorias del Banco de España, considerando $r_1(k) =$ tipo básico y $r_2(k) = r(k) =$ tipo de los bonos bancarios, estudiaremos su comportamiento frente a una perturbación cuando se controla dicho sistema en bucle abierto o en bucle cerrado, comparándolos por último.

Si la senda de equilibrio del sistema

$$x(k + 1) = x(k) + Bu(k)$$

es $x_0(k)$, el control en bucle abierto $u_0(k)$ será una senda de control obtenida a partir de:

$$x_0(k) = x(k) = x(0) + B[u(0) + \dots + u(k - 1)]$$

Para la misma senda de equilibrio el control en bucle cerrado será proporcional al error, es decir (gráfico A 9):

$$u_1(k) = K_c[x(k) - x_0(k)]$$

de modo que, si en un cierto instante k los vectores de estado y de equilibrio deseado coinciden ($x(k) = x_0(k)$), entonces, $u_1(k) = 0$.

Si la matriz del sistema es la identidad ($A = I$) y el control se anula, se tiene que $x(k + 1) = x(k)$. Entonces, si $x(k) = x_0(k)$, salvo en el caso particular en el que $x_0(k + 1) = x_0(k)$ para todo k , se verificará que $x(k) = x(k + 1) \neq x_0(k + 1)$ y por tanto, sólo se podrá controlar el sistema haciendo uso del control proporcional al error cuando exista un cierto error; por ello, puede combinarse éste con otros dos términos: uno proporcional a la integral del error (o suma de los errores en variable discreta) y otro a la derivada del error (o incremento del error en variable discreta). El primero representa la persistencia del error en el tiempo y el segundo la velocidad a la que éste crece (gráfico A10).

Alternativamente, si consiguiéramos que $x_0(k)$ fuese una senda de equilibrio del sistema haciendo uso del control en bucle abierto $u_0(k)$, introduciendo simultáneamente un control en bucle cerrado $u_1(k)$ proporcional al error ($u(k) = u_0(k) + u_1(k)$), dicha senda se convertiría en asintóticamente estable. En este caso, si $x(k) = x_0(k)$, el error se anula ($u(k) = u_0(k)$) y $x(k + 1) = x_0(k + 1)$. Sin embargo, si $x(k) \neq x_0(k)$ el error se introduce en el control para intentar anularlo (gráfico A-11). El inconveniente de este procedimiento es la necesidad de efectuar los cálculos del control en bucle abierto.

Por último, es posible utilizar los resultados de la Teoría del Control Óptimo para calcular el control que minimice la desviación entre el vector de estado y la trayectoria de estado deseada, a la vez que minimiza su propia desviación respecto a una trayectoria de control deseada. Este procedimiento, que sobrepasa los objetivos del presente trabajo, permite eliminar la indeterminación que

se presenta al tratar de elegir los autovalores del sistema controlado con los únicos requerimientos de que no se produzcan oscilaciones y el sistema sea asintóticamente estable.

En nuestro caso requeriría la resolución de un sistema de ecs. de Riccati para cada instante de tiempo k , lo que representaría un esfuerzo de cálculo importante.

a) CONTROL EN BUCLE ABIERTO

Estimadas las constantes del modelo, calculamos la matriz de distribución de entradas B :

$$B = \begin{bmatrix} \delta_1 + \mu\beta_1\gamma_1 & -\mu\beta_1 \\ -\mu\gamma_1 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -131,263 & -0,47817 \\ 1,081,07 & 2,9752 \end{bmatrix}$$

y así podemos simular el comportamiento del sistema controlado, en este apartado en bucle abierto y en el siguiente en bucle cerrado.

El gráfico A12 ilustra los resultados obtenidos al simular con este modelo el comportamiento de la economía en 1981. La comparación con los datos provisionales disponibles muestra las discrepancias, que como cabía esperar por la simplicidad del modelo son importantes. Sin embargo, ya hemos dicho que nuestro objetivo era simplemente ilustrar los resultados de la Teoría del Control enunciados en el epígrafe anterior.

Para analizar la estabilidad del sistema basta con conocer los autovalores de la matriz del sistema homogéneo asociado. Como el sistema homogéneo es:

$$\begin{Bmatrix} B(k+1) \\ Y(k+1) \end{Bmatrix} = I \begin{Bmatrix} B(k) \\ Y(k) \end{Bmatrix}$$

y $\lambda = 1$ es un autovalor doble de la matriz $A = I$ con dos autovectores linealmente independientes, el sistema es marginalmente estable y las perturbaciones no se amortiguarán a largo plazo.

Controlar en bucle abierto el sistema:

$$\begin{Bmatrix} B(k+1) \\ Y(k+1) \end{Bmatrix} = I \begin{Bmatrix} B(k) \\ Y(k) \end{Bmatrix} + B \begin{Bmatrix} \Delta r_2(k) \\ \Delta D(k) \end{Bmatrix}$$

de forma que la solución siga una trayectoria deseada $x_0(k)$, requiere calcular el control $\begin{Bmatrix} \Delta r_2(k) \\ \Delta D(k) \end{Bmatrix}$ como función de dicha trayectoria y de los parámetros del sistema. Si $x_0(k) = \begin{Bmatrix} B(0)(1 - \theta_B)^k \\ Y(0)(1 + \theta_Y)^k \end{Bmatrix}$ es la trayectoria deseada, para la cual se

amortigua $B(k)$ a una tasa θ_B y crece $Y(k)$ a una tasa θ_Y , el control en bucle abierto deberá ser de la forma:

$$u_0(k) = \begin{Bmatrix} \Delta r_2(k) \\ \Delta D(k) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1(1 - \theta_B)^k + c_2(1 + \theta_Y)^k \\ c_3(1 - \theta_B)^k + c_4(1 + \theta_Y)^k \end{Bmatrix}$$

Este vector $u_0(k)$ debe cumplir

$$\begin{Bmatrix} B(k) \\ Y(k) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B(0)(1 - \theta_B)^k \\ Y(0)(1 + \theta_Y)^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B(0) \\ Y(0) \end{Bmatrix} + B[u(0) + \dots + u(k-1)]$$

de donde identificando los términos en $(1 - \theta_B)^k$ y $(1 + \theta_Y)^k$ se calculan las constantes c_1, c_2, c_3, c_4 y obtenemos que:

$$u_0(k) = \begin{Bmatrix} \Delta r_2(k) \\ \Delta D(k) \end{Bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} -B(0)\theta_B(1 - \theta_B)^k & 0 \\ 0 & Y(0)\theta_Y(1 + \theta_Y)^k \end{bmatrix}$$

$$(0 \leq \theta_B < 1)$$

$$(0 \leq \theta_Y < 1)$$

que transforma $x_0(k)$ en una senda de equilibrio para la cual, si $x(k) = x_0(k)$ para un cierto k , permanece $x(k+l) = x_0(k+l) \forall l \geq 0$ siempre que no se produzcan perturbaciones externas al sistema.

En el gráfico A13 se aprecia el efecto del control en bucle abierto en ausencia de perturbaciones para una senda de equilibrio con $\theta_B = 0,99$ y $\theta_Y = 0,10$ que representa el equilibrio de Financiación para una tasa de crecimiento de la economía del 10 por 100 anual.

La senda de equilibrio obtenida mediante control en bucle abierto es marginalmente estable, lo que representa que las perturbaciones no se amortiguan a largo plazo, como muestra el gráfico A14 obtenido introduciendo una perturbación ($\Delta Y(0) = -1.000$) en la condición inicial.

En la gráfica de $Y(k)$ (gráfico A14, apartado b), la línea continua representa la trayectoria perturbada y la línea de puntos de trayectoria original sin perturbar. Observamos que crecen paralelamente manteniéndose indefinidamente la perturbación inicial.

b) CONTROL EN BUCLE CERRADO CON RETARDO EN LA OBSERVACIÓN

Si transformamos el sistema haciendo uso del observador

$$z(k+1) = (I - E)z(k) + Bu(k) + (I - E)Ey(k)$$

junto con el control en bucle cerrado proporcional al error aproximado $\hat{\xi}(k)$

$$u_1(k) = [K_c \ 0] \hat{\xi}(k) = K_c [\hat{w}(k) - x_0(k)]$$

$$\hat{w}(k) = z(k) + Ey(k)$$

cuando las matrices del observador y del control son respectivamente

$$E = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad K_c = \begin{bmatrix} -0,01177 & -0,001892 \\ 4,276 & 0,5192 \end{bmatrix}$$

obtenemos el sistema controlado que es asintóticamente estable puesto que los autovalores de la matriz de este sistema son $\lambda = \frac{1}{2}$ cuádruple.

Nótese que es preciso imponer en el observador las condiciones iniciales adecuadas para que siga correctamente al sistema que es asintóticamente estable.

Si la trayectoria deseada es

$$x_0(k) = \begin{cases} B(0)(1 - \theta_B)^k \\ Y(0)(1 + \theta_Y)^k \end{cases}$$

con $\theta_B = 0,99$ y $\theta_Y = 0,10$, podemos transformar el sistema controlado en bucle abierto, marginalmente estable, para el cual $x_0(k)$ era una trayectoria de equilibrio, en un sistema asintóticamente estable con la misma trayectoria de equilibrio, combinando el control en bucle abierto y en bucle cerrado:

$$u(k) = u_0(k) + K_c(\hat{w}(k) - x_0(k))$$

siendo $u_0(k)$ el control calculado en bucle abierto para obtener una trayectoria de equilibrio $x_0(k)$. Si $x(k) = x_0(k)$, será $\varepsilon(k) = 0$ y $u(k) = u_0(k)$ que proporciona la trayectoria de equilibrio $x_0(k)$. Si $x(k) \neq x_0(k)$, $\varepsilon(k) \neq 0$ y el control actuaría para anular el error.

En el gráfico A15 se aprecia cómo el sistema controlado sigue la trayectoria de equilibrio

$$x_0(k) = \begin{cases} 0 \\ Y(0)(1,1)^k \end{cases}$$

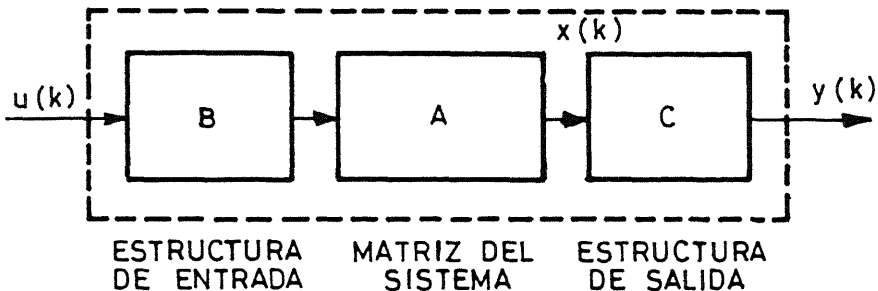
amortiguándose la perturbación en $Y(0)$ a largo plazo, ya que el sistema homogéneo es asintóticamente estable (gráfico A16).

En resumen, la estimación de este modelo macroeconómico nos ha permitido ilustrar los resultados fundamentales de la Teoría del Control. A partir de los datos de la economía española se han analizado sus características de estabilidad, controlabilidad y observabilidad y desarrollado procedimientos de control en bucle abierto y cerrado.

Dado que el modelo estudiado no es controlable por una única variable instrumento, en el segundo epígrafe no sólo se recogen los resultados conocidos de la Teoría del Control aplicables a sistemas de entrada única sino que, haciendo uso del concepto de forma normal natural, se han generalizado los Teoremas de Colocación y Separación. Estas generalizaciones permiten un estudio más completo del modelo objeto de análisis.

Apéndice

a) VARIABLE DISCRETA



a) VARIABLE CONTINUA

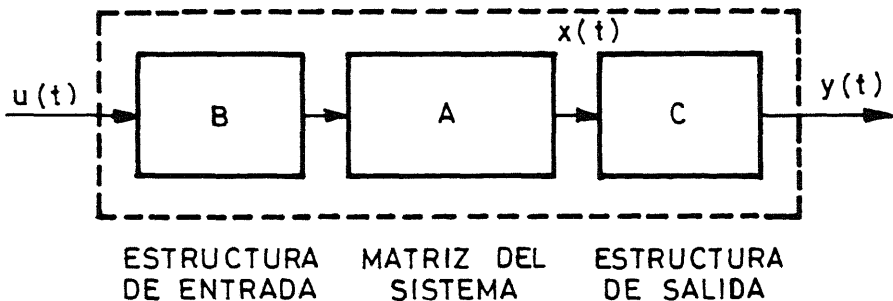
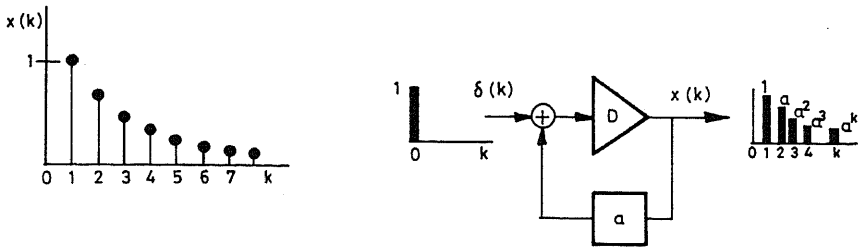


Gráfico A1. Sistemas lineales de coeficientes ctes. expandidos.

a) RESPUESTA AL IMPULSO UNIDAD



b) SUPERPOSICION DE LOS EFECTOS

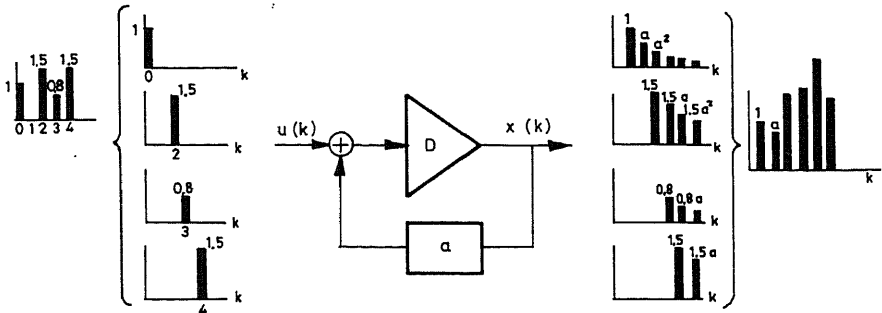


Gráfico A2. Superposición de las entradas al sistema (caso de entrada única, sistema de orden 1, variable discreta).

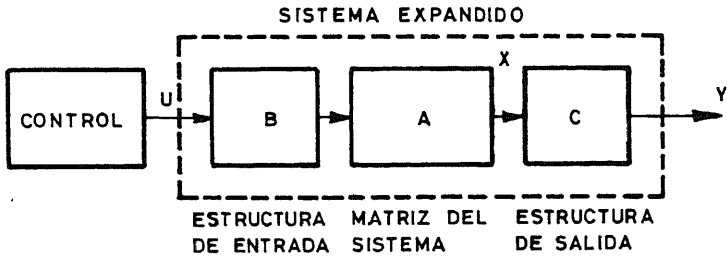


Gráfico A3. Control en bucle abierto.

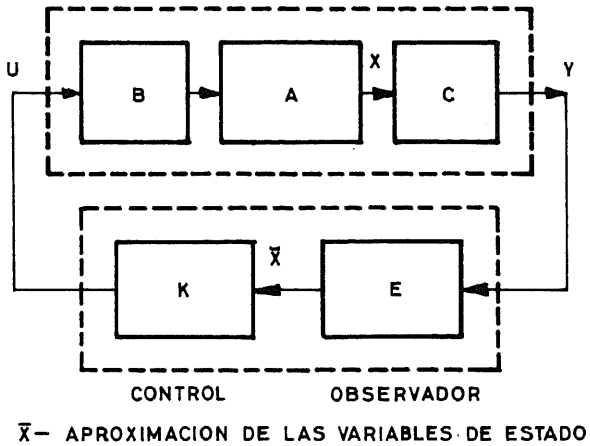


Gráfico A4. Control en bucle (realimentación).

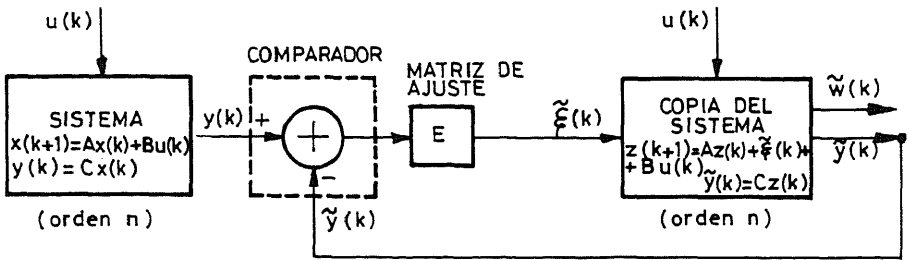


Gráfico A5. Observador identidad.

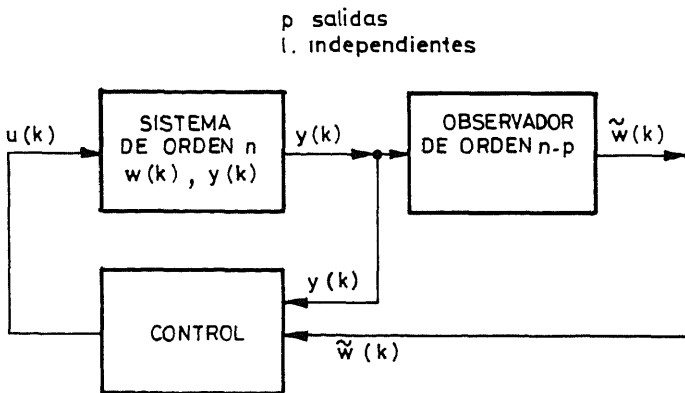
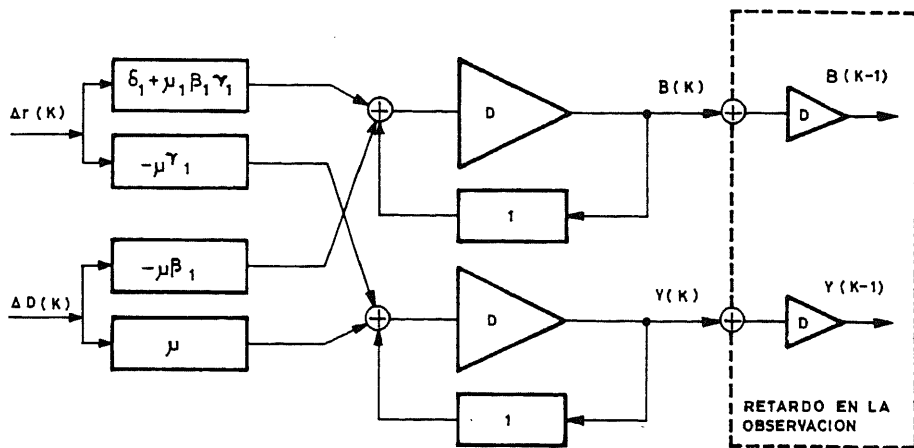
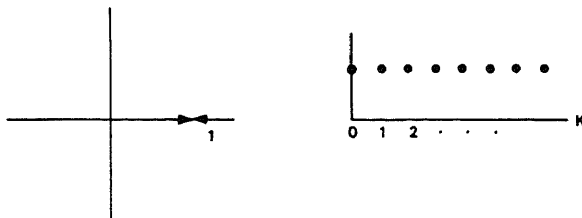


Gráfico A6. Observador de orden reducido.



SISTEMA MARGINALMENTE ESTABLE



SISTEMA ASINTOTICAMENTE ESTABLE

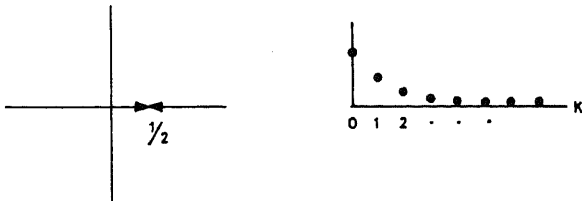
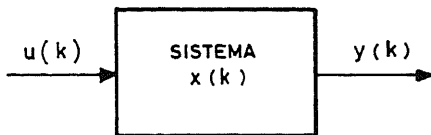
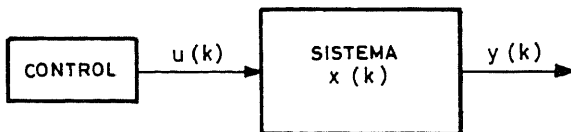


Gráfico A7. Modelo de McFadden.

SISTEMA ORIGINAL



SISTEMA CONTROLADO EN BUCLE ABIERTO



SISTEMA CONTROLADO EN BUCLE CERRADO

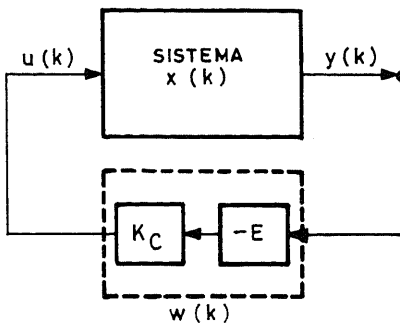


Gráfico A8. Tipos de control.

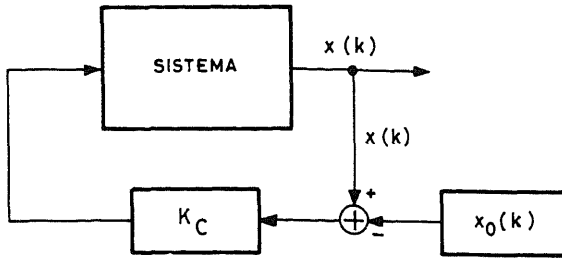


Gráfico A9. Control en bucle cerrado proporcional al error.

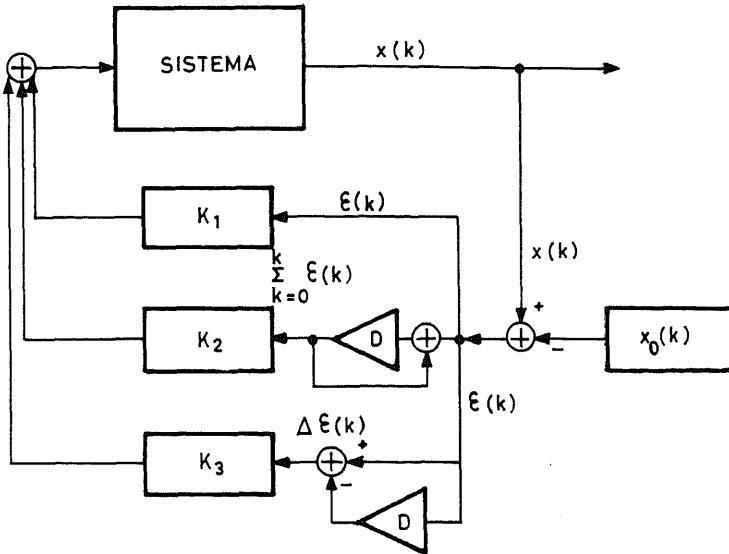


Gráfico A10. Control proporcional-integral-diferencial.

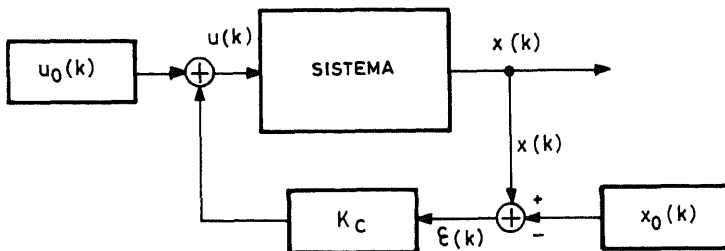


Gráfico A11. Control combinado.

— SIMULACION
- - - DATOS REALES

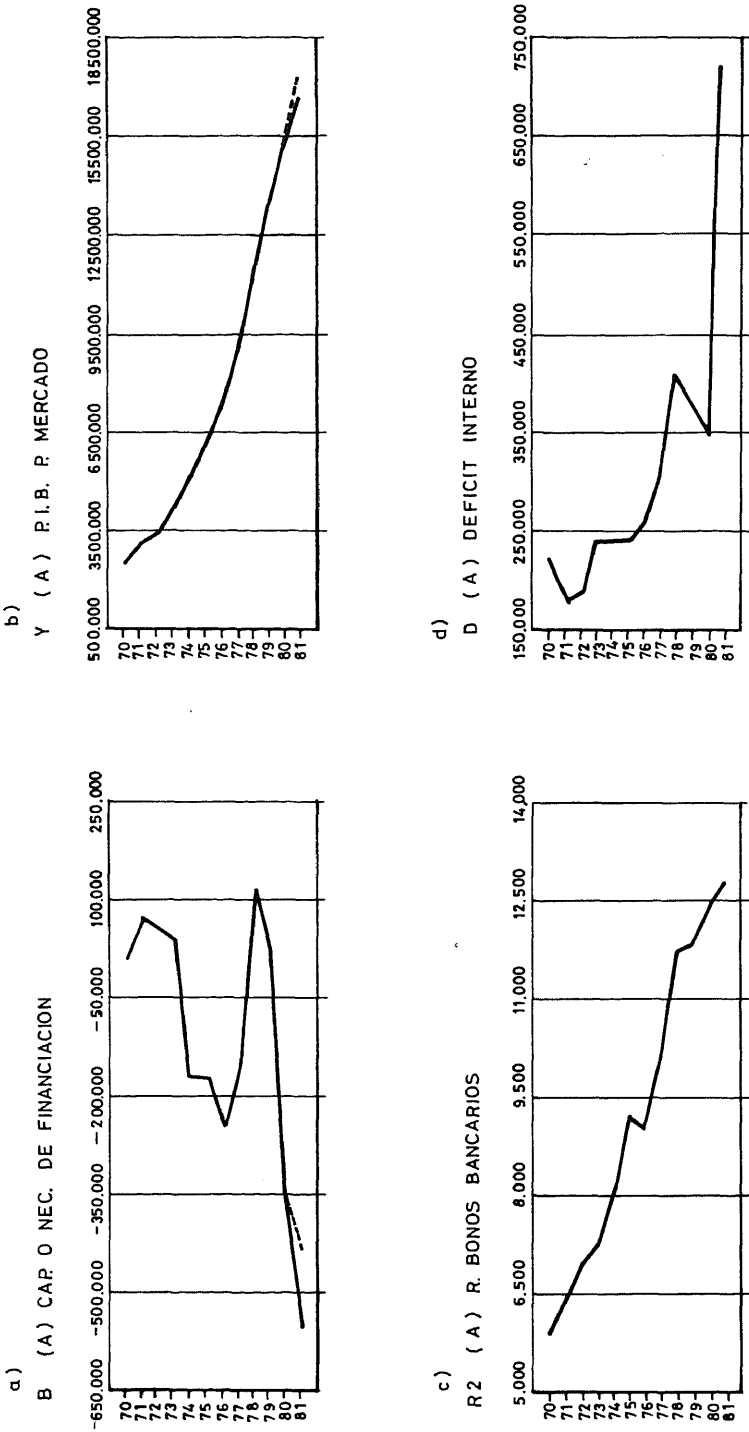


Gráfico A12. Validación del modelo.

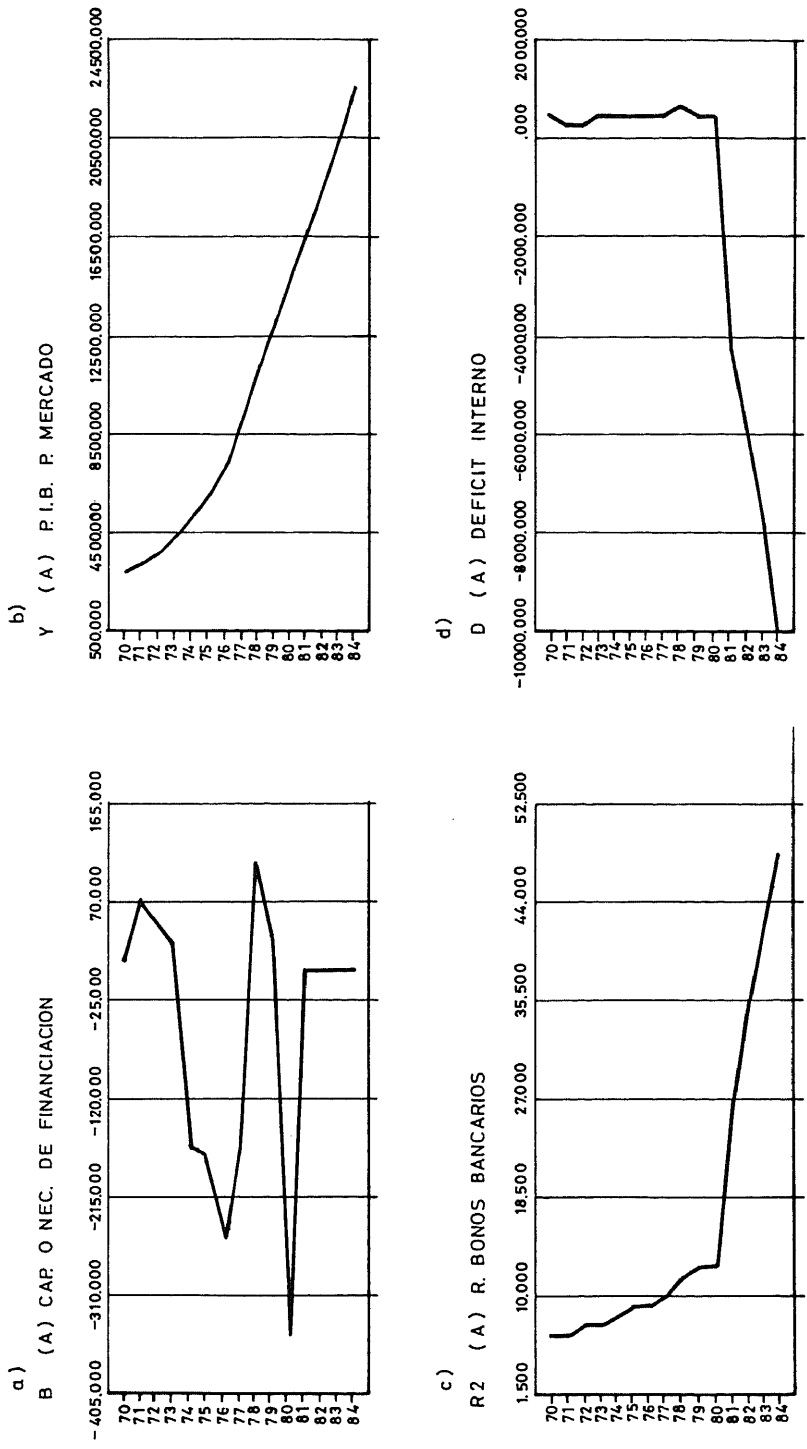


Gráfico A13. Senda de equilibrio del sistema controlado en bucle abierto.

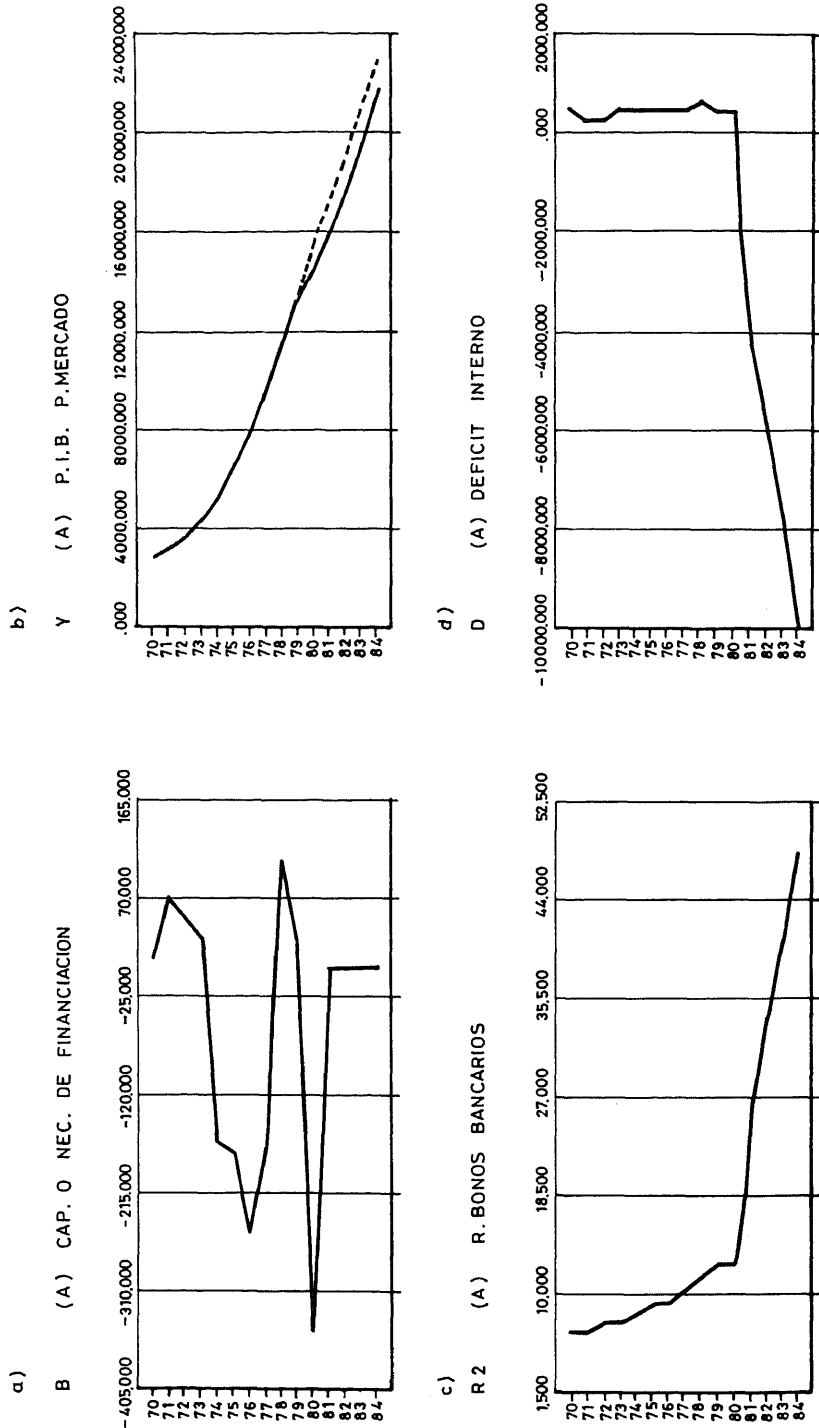


Gráfico A14. Senda de equilibrio del sistema controlado en bucle abierto con perturbación en $Y(0)$.

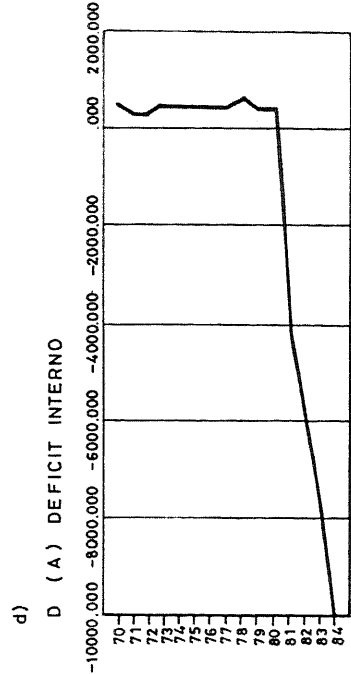
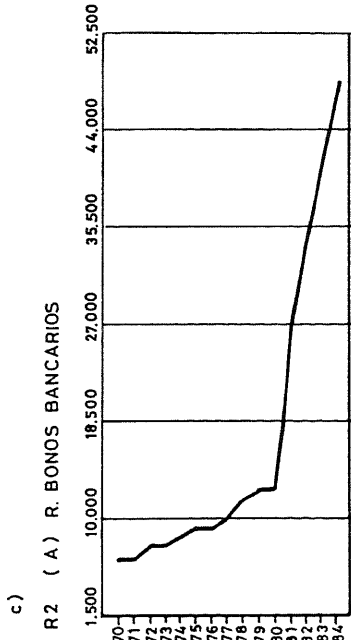
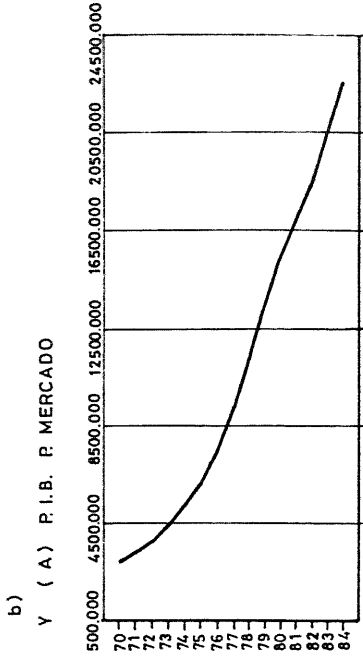
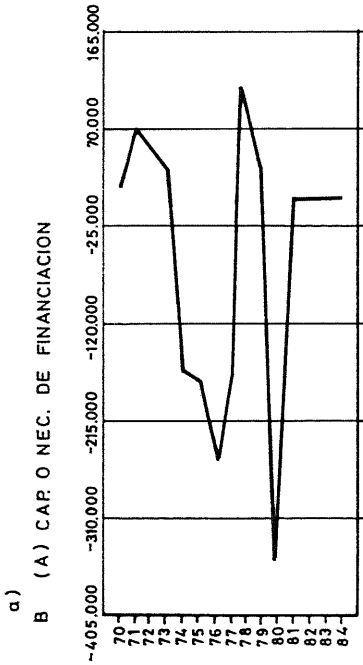


Gráfico A15. Sistema controlado en bucle cerrado con senda de equilibrio en bucle abierto.

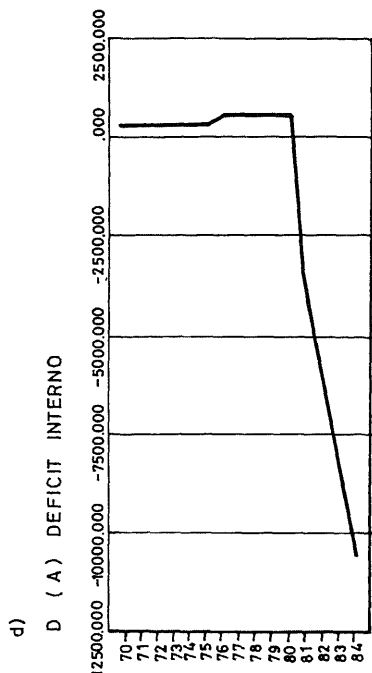
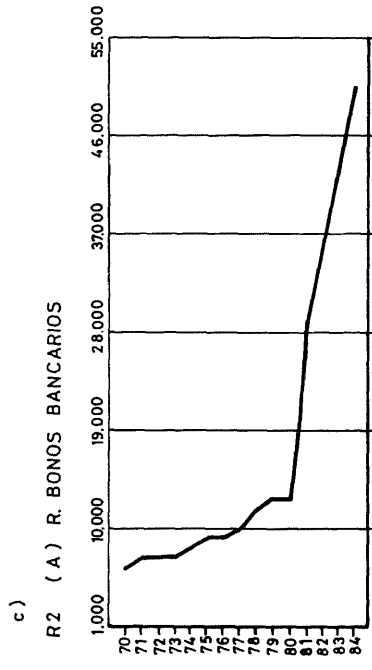
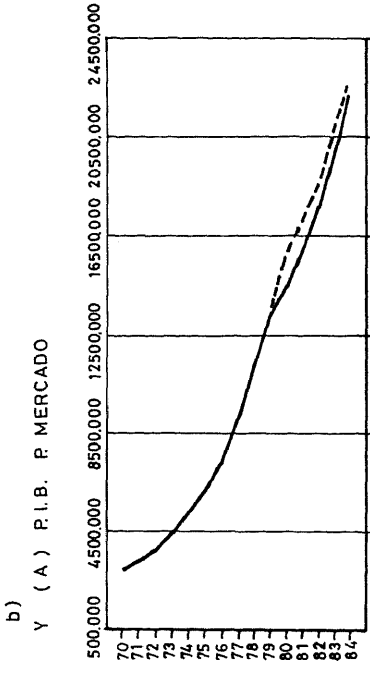
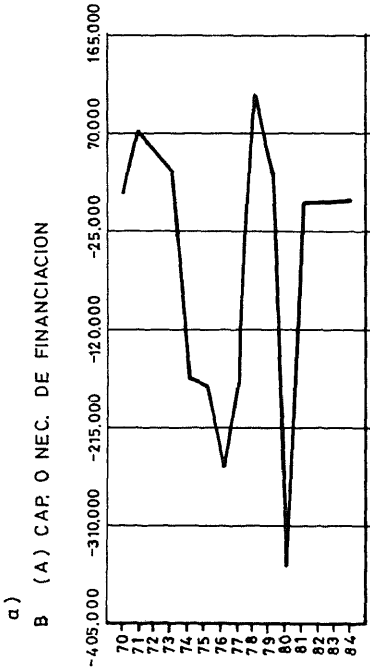


Gráfico A16. Sistema controlado en bucle cerrado con senda de equilibrio en bucle abierto y perturbación en $Y(0)$.

Referencias

- Aoki, M. (1976): *Optimal Control and Systems Theory in Dynamic Economic Analysis*, North-Holland.
- Barbolla, R. y Gomez, J. P. (1985): «Control de Sistemas Económicos en el Espacio de los Estados», *X Simposium de Bellaterra de Análisis Económico*, U.A.B.
- Buiter, W. H. (1983): «Expectations and Control Theory», *Economie Appliquée* tomo XXXVI, núm. 1, págs. 129-156.
- Gille, J. Ch. y Cliqui, M. (1984): *Systemes Lineaires Equations D'Etat* Eyrolles.
- Luenberger, D. G. (1979): *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models and Applications*. Wiley.
- Malisev, A. I. (1976): *Fundamentos de Algebra Lineal*, Mir.
- Murata, Y. (1977): *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press.
- Perkins, W. R., Cruz, J. B. y Sundarabajan, N. (1972): «Feedback Control of a Macroeconomic System Using an Observer». *I.E.E.E. Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. April, I.E.E.E.
- Strejč, V. (1981): *State Space Theory of Discrete Linear Control*, Wiley.

Abstract

State Space Control Theory and applications to the Spanish Economy are involved in this paper.

Firstly, a summary is presented of the most recently developed Control Theory, jointly with the modified proofs of some classical theorems, based on the conceptual framework of matrix eigenvalue associated to a linear application invariant subspace. Due to the multiinput structure of the model we choose to illustrate the application of Control Theory, a generalization of the eigenvalue placement and separation theorems is performed for a multiple input system with a reduced order observer, taking into account the definition of the natural normal form of a square matrix.

Secondly, a McFadden's proposed macroeconomic model is fitted to real data from the Spanish economy, showing possible economic applications of Control Theory. Several modifications should be considered in order to make meaningful the economic policies based on the model.

Recepción del original, octubre de 1985.

Versión final, octubre de 1986.