Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. X, n.º 1 (1986), págs. 141-162

LA SENSIBILIDAD DE LAS DECISIONES DE INVERSION ANTE VARIACIONES SISTEMATICAS DE LOS FLUJOS DE CAJA*

Joan MONTLLOR

Universidad Autónoma de Barcelona

«A les palpentes
cal sempre anar vers una llum ignota,
sota les voltes de l'obscuritat.»
Joan Vinyoli: *L'Encanteri.*

Este trabajo estudia la sensibilidad de diferentes medidas del rendimiento de las inversiones —tasa de rentabilidad interna, valor actual neto y valor final neto— frente a variaciones sistemáticas de los flujos de caja, dedicando una especial atención al cálculo de aquellos valores de los factores de variación que convierten la inversión estudiada en no deseable. Mediante el valor final neto se extiende además el análisis al equilibrio financiero de cada período. Finalmente se realacionan diferentes versiones del plazo de recuperación con el análisis de sensibilidad de la duración temporal de las inversiones.

1. Introducción

Este trabajo trata determinados aspectos del análisis de sensibilidad de la selección de inversiones. Como es bien sabido, la técnica conocida bajo la denominación de análisis de sensibilidad se ocupa de la variación que experimenta el resultado de un modelo formal, frente a las variaciones del valor de uno o varios —habitualmente uno— de los parámetros de tal modelo. Todo modelo formalizado relaciona, mediante una estructura funcional, un conjunto de variables dependientes con otro conjunto de variables que determinan el valor de las anteriores mediante dicha estructura del modelo. Dentro de este segundo conjunto de variables podemos distinguir dos subconjuntos: el de las variables independientes, cuyos valores pueden oscilar dentro del campo asignado a cada una de ellas, y el de los parámetros. Los parámetros no son más que variables cuyo valor —por una convención previamente aceptada, que puede consistir tanto en asumir una determinada hipótesis respecto a una variable que no se halla bajo el control del decisor, como en una decisión sobre el valor de una de las variables que se

* La elaboración de este trabajo se ha beneficiado de los interesantes comentarios del doctor Enric Ribas Mirangels, catedrático de la Universidad de Barcelona, y de los doctores Josep Lluís Martínez Parra y Josep M.ª Salas Puig, profesores de la Universidad Autónoma de Barcelona. Los posibles errores son de exclusiva responsabilidad del autor.

hallan bajo el control del decisor— no cambia. En palabras de Mario Bunge puede decirse que «los parámetros son variables que en un contexto dado quedan congeladas»[1]. El análisis de sensibilidad rompe dicha convención ocupándose precisamente de cómo las variaciones del valor de uno o varios parámetros —dados unos determinados valores de las variables independientes— inciden sobre el resultado del modelo.

A. Rappaport, en un trabajo[2] en el que estudia las posibilidades del análisis de sensibilidad como método de análisis de decisiones, señala que su finalidad principal se centra en facilitar la comprensión del riesgo que entraña la decisión objeto de estudio. Cumple esta finalidad examinando los efectos que se producen en el resultado del modelo aplicado al asumir diferentes hipótesis relativas a los valores de sus parámetros, con lo que se engloba —junto con la simulación principalmente— en el campo de las técnicas que responden a la famosa cuestión denominada «what if» en lengua inglesa y que esencialmente consisten en llevar a cabo, con base en diferentes metodologías, exámenes de hipótesis relativamente próximos al aquí expuesto[3].

Existen diferentes modalidades —no excluyentes, sino complementarias— de aplicación de esta técnica. En el ámbito de la selección de inversiones podemos señalar, como principales, las siguientes:

a) El estudio —a través de la correspondiente derivada— del cambio producido en el resultado del modelo por una variación infinitesimal del parámetro estudiado. A partir de aquí es inmediato obtener la elasticidad, lo cual será oportuno en la medida en que resulte conveniente examinar dicha variación en términos relativos.

b) El segundo enfoque consiste en atribuir al parámetro cuyos efectos se estudian, diferentes valores —habitualmente tres: pesimista, normal y optimista— asignando a cada uno de ellos una probabilidad subjetiva. Ello permite conocer el resultado del modelo en cada una de las alternativas consideradas, la esperanza matemática del mismo y los valores de los demás momentos que se crea necesario obtener, debiéndose tener bien claro el carácter subjetivo de tales valores. Algunos autores sitúan este enfoque dentro del análisis de sensibilidad mientras que otros lo sitúan dentro del análisis de riesgo, tratándose, sin embargo, de una distinción que se halla lejos de tener carácter crucial.

[1] Véase M. Bunge (1979), pág. 399.

[2] Véase A. Rappaport (1967).

[3] El análisis de sensibilidad tradicional, cuya metodología básica se expone resumidamente en esta introducción, y las técnicas de simulación se hallan suficientemente próximos como para que no sea infrecuente considerar que dichas técnicas se integran en una concepción más amplia del análisis de sensibilidad. Véase, por ejemplo, Rappaport (1967), pág. 441, notas primera y segunda. Sin embargo, al hablar de análisis de sensibilidad en este trabajo lo hacemos en el sentido más tradicional que considera la simulación como una técnica diferenciada de dicho análisis, aunque metodológicamente cercana. Tal enfoque es adoptado en un buen número de manuales de inversión y financiación, por ejemplo, Brealey y Myers (1984), págs. 195-208, Franks y Broyles (1979), pág. 118 y Wilkes (1983), págs. 304-318.

c) La tercera modalidad, que es la adoptada en este trabajo, consiste en calcular cuál es el nivel de variación del parámetro considerado que conduce a un cambio en la deseabilidad del proyecto o, expresado en términos más generales, que altera la estabilidad de la solución ótima[4].

Así pues, en el campo de la evaluación de proyectos de inversión, el análisis de sensibilidad estudia las modificaciones que experimenta el rendimiento del proyecto analizado frente a variaciones del coste inicial de la inversión, los recursos generados por la explotación, el coste de capital, la duración de la vida del proyecto, su valor residual, etc. Conviene tener en cuenta que en los modelos de rentabilidad aplicados a la selección de inversiones, la distinción entre variables independientes y parámetros no viene dada por el propio modelo, sino que es fruto de una decisión del analista. Una vez calculada la rentabilidad de un proyecto de inversión de acuerdo con el modelo elegido y para unos valores concretos de las variables independientes del mismo, sin que ninguna de ellas tenga «a priori» carácter de parámetro, el analista elige cuál de dichas variables parametriza con objeto de estudiar la sensibilidad de la solución obtenida con respecto a tal variable parametrizada.

El propósito central de este trabajo consiste en desarrollar el análisis de sensibilidad de diferentes modelos utilizados para valorar el rendimiento de los proyectos de inversión —tasa de rentabilidad interna, valor actual neto y valor final neto, este último a partir de proyectos agregados— para variaciones sistemáticas de los recursos generados por la explotación y del margen bruto de explotación, extendiéndose asimismo el estudio de la incidencia de la vida de los proyectos de inversión en el resultado de los modelos indicados[5]. Se trata, en definitiva, de estudiar cómo las modificaciones sistemáticas de tales variables influyen en la aceptabilidad de los proyectos de inversión.

[4] Como ejemplos de estas modalidades podemos mencionar que *a*) es adoptada por Joy y Bradley (1973 y 1978) y los trabajos relacionados con los anteriores que oportunamente mencionaremos. El manual de Brealey y Myers (1984) puede incluirse en la orientación *b*), mientras que *c*) constituye la base del trabajo de Rappaport (1967), siendo adoptada asimismo en el clásico manual de Suárez (1982), que además también incorpora *b*) dentro del análisis de riesgo. Corresponden también al enfoque *c*) la programación paramétrica y los análisis del punto muerto. Entre estos últimos resulta de especial interés el trabajo de A. Reinhard (1973), quien presenta un modelo para el cálculo del punto muerto a nivel de valor actual neto para el conocido caso del proyecto Tri-Star de la compañía Lockheed, donde se destaca la importancia de no omitir los costes de oportunidad del capital en este tipo de análisis.

[5] El lector que se interese por los aspectos generales del análisis de sensibilidad en la selección de inversiones puede consultar las obras de A. S. Suárez (1982), págs. 133-142 y Brealey y Myers (1984), págs. 195-202. En Wilkes (1983), págs. 304-312 y Tarquin y Blank (1976) se exponen algunos casos concretos que resultan especialmente claros e interesantes.

2. Análisis de sensibilidad de la tasa de rentabilidad interna y del valor actual neto respecto a la variaciones de los recursos generados por la explotación

2.1. *Variación exponencial de los recursos generados por la explotación*

Veamos en primer lugar cómo una variación exponencial de los recursos generados por la explotación afecta a las tasa de rentabilidad interna (*TRI*) de un proyecto de inversión. Por la definición de *TRI* sabemos que:

$$(TRI \equiv r^*) \Rightarrow -a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1 + r^*)^t} = 0 \qquad [1]$$

donde a_0 designa el importe de la inversión inicial y a_t el valor esperado de los recursos generados por la explotación, netos de impuestos, en t más el valor residual de aquella parte de la inversión que finaliza su vida en t y que frecuentemente sólo aparecerá cuando $t = n$. A efectos de este trabajo supondremos que los valores residuales experimentan la misma variación que los recursos generados por la explotación, de modo que, a partir de este momento, nos referiremos sólo a estos últimos en beneficio de la agilidad del lenguaje[6].

Contemplemos, pues, el caso de una reducción exponencial de los recursos generados por la explotación según un factor h, obviamente menor que la unidad, de manera que si a'_t designa el valor efectivo de tales recursos en el período t, tenemos:

$$a'_t = h^t a_t \qquad [2]$$

Si se produce la reducción que acabamos de indicar, la tasa de rentabilidad interna efectiva —que designaremos por i^*— es aquel tipo de interés que cumple la siguiente ecuación:

$$-a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{h^t a_t}{(1 + i^*)^t} = 0 \qquad [3]$$

De [1] y [3] se desprende que:

$$\frac{h}{1 + i^*} = \frac{1}{1 + r^*} \qquad [4]$$

[6] Evidentemente la finalidad de esta hipótesis consiste en facilitar el tratamiento formal que mas adelante se realiza y que se fundamenta en considerar variaciones uniformes de los flujos. Cuando tal hipótesis resulte excesivamente restrictiva, puede realizarse un análisis similar al propuesto en este trabajo actualizando al momento inicial los valores residuales esperados, empleando como tasa de actualización aquella que se utilizaría en el cálculo del valor actual neto. Es preciso advertir que esta forma de proceder altera —en general de manera no significativa— el valor de la tasa de rentabilidad interna.

de donde obtenemos:

$$i^* = h(1 + r^*) - 1 \qquad [5]$$

ecuación que permite conocer de un modo muy sencillo cuál será el valor de la tasa de rentabilidad interna efectiva, dada una determinada tasa de reducción exponencial de los recursos generados por la explotación.

Especialmente interesante resulta hallar un valor crítico de h (h_{cr}), tal que:

$$h_{cr} \Rightarrow i^* = k,$$

donde k designa el coste de capital a utilizar como tasa de actualización de los flujos del proyecto de inversión que se analiza.

El valor de h_{cr} se determina mediante la siguiente expresión:

$$h_{cr} = \frac{1 + k}{1 + r^*} \qquad [6]$$

a la que se llega muy fácilmente a partir de [5].

$(1 - h_{cr})$ indica la máxima reducción exponencial que pueden experimentar los recursos generados por la explotación sin que la tasa de rentabilidad interna resulte inferior al coste de capital. Así pues, podemos interpretar $(1 - h_{cr})$ como un factor que mide la resistencia de la tasa de rentabilidad interna del proyecto de inversión frente a una reducción exponencial de los recursos generados por la explotación.

Si lo preferimos, podemos sustituir h por una tasa de descuento equivalente θ tal que:

$$h = \frac{1}{1 + \theta} \qquad [7]$$

obteniéndose entonces las siguientes igualdades:

$$-a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1 + i^*)^t (1 + \theta)^t} = 0 \qquad [8]$$

$$1 + r^* = (1 + i^*)(1 + \theta) \qquad [9]$$

y asimismo obtenemos un valor crítico de θ (θ_{cr}) que tiene la misma propiedad que h_{cr} al igualar i^* con k:

$$\theta_{cr} = \frac{r^* - k}{1 + k} \qquad [10]$$

Observándose la semejanza de la ecuación [9] con el efecto Fisher que relaciona las tasas de interés real y nominal mediante la tasa de inflación[7]. Por tanto, es posible asimilar θ a una tasa de inflación constante que reduce el valor real de los recursos generados por la explotación y transforma la rentabilidad nominal r^* en la rentabilidad real i^*[8].

2.2. *Variación lineal de los recursos generados por la explotación*

Consideremos ahora el caso en que los recursos generados por la explotación se reducen linealmente según un coeficiente f constante para todos los períodos. Tenemos, pues:

$$a'_t = fa_t \qquad [11]$$

y entonces:

$$i^* \Rightarrow -a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{fa_t}{(1 + i^*)^t} = 0 \qquad [12]$$

donde i^* mantiene el mismo significado que en el apartado anterior, como lo vendrá haciendo a lo largo de todo este trabajo.

En este caso no existe una relación explícita entre f e i^*, pero conocido el valor de f podemos conocer el valor de i^* mediante los procedimientos habitualmente utilizados en el cáculo de la tasa de rentabilidad interna.

Existe, asimismo, un valor crítico de f, tal que:

$$f_{cr} \Rightarrow -a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{f_{cr}a_t}{(1 + k)^t} = 0 \qquad [13]$$

[7] Sobre el efecto Fisher, véase Brealey y Myers (1984), págs. 462-465.

[8] El análisis de sensibilidad del valor actual neto para el caso de igualdad entre todos los flujos del proyecto de inversión, excepto la inversión inicial, ha sido estudiado por Huefner (1971). El mismo autor (1972) extiende su trabajo a cuando tales flujos siguen una progresión geométrica de razón $(1 + p)$, pues establece como hipótesis $a_t = (1 + p)a_{t-1}$ $(t = 2, 3, \ldots, n)$ y $a_1 = a$, de donde es inmediato deducir que $a_t = a(1 + p)^{t-1}$. Los parámetros cuya variación analiza son los mencionados flujos y la vida del proyecto.
Un modelo del análisis de sensibilidad de la tasa de rentabilidad interna referido a los mismos parámetros, ha sido desarrollado por Joy y Bradley (1973). Dicho trabajo se concreta en un caso en el que los flujos del proyecto de inversión posteriores al inicial declinan siguiendo una progresión geométrica de razón $(1 - d)$, de modo que $a_t = a_1(1 - d)^{t-1}$. El artículo original de Joy y Bradley ha merecido diversos comentarios y críticas posteriores. Véase Whisler (1976), Smith (1978) y Joy y Bradley (1978).
Las hipótesis asumidas por estos autores facilitan la obtención de resultados, pero es preciso admitir que poseen un carácter notablemente particular que limita las posibilidades de aplicación de los modelos que de ellas surgen. Nótese que los casos analizados en el texto del presente artículo difieren de los citados en esta nota, pues en los mismos, los valores de los flujos del proyecto pueden ser cualesquiera, aplicándoseles luego un factor de reducción que puede ser exponencial o lineal.

y por tanto:

$$f_{cr} = \frac{a_0}{\sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1 + k)^t}} \qquad [14]$$

$(1 - f_{cr})$ indica la máxima reducción lineal que pueden experimentar los recursos generados por la explotación, sin que la rentabilidad interna efectiva del proyecto resulte inferior al coste del capital.

2.3. *Variación exponencial de los márgenes brutos de explotación*

La presencia de gastos fijos en los recursos generados por la explotación motiva que convenga considerar los efectos de las variaciones del margen bruto de explotación —entendido como la diferencia entre ingresos y gastos variables— mientras que los gastos fijos permanecen constantes. En cuanto sigue, consideraremos que los ingresos y los gastos variables experimentan una variación idéntica.

Analizaremos, en primer lugar, el caso en que el margen bruto de explotación (mb) experimenta una reducción exponencial. Designando los gastos fijos por g, la expresión básica para el cálculo de la TRI es ahora:

$$-a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{mb_t - g_t}{(1 + r^*)^t} = 0 \qquad [15]$$

Supongamos que los márgenes brutos de explotación se reducen exponencialmente mediante un factor h', de modo que la relación entre el margen bruto efectivo (mb'_t) y el esperado es:

$$mb'_t = h'^t \cdot mb_t \qquad [16]$$

También aquí podemos expresar h' a través de una tasa θ' tal que cumple:

$$h' = \frac{1}{1 + \theta'} \qquad [17]$$

y entonces podemos escribir:

$$-a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{mb_t}{(1 + i^*)^t(1 + \theta')^t} - \sum_{t=1}^{n} \frac{g_t}{(1 + i^*)^t} = 0 \qquad [18]$$

En este caso no podemos hallar una relación explícita de i^* y θ' con r^*. Sin embargo, resulta sencillo conocer cuál es el valor crítico de θ' que iguala la tasa de rentabilidad interna efectiva con el coste del capital. En efecto, para calcular:

$$\theta'_{cr} \Rightarrow i^* = k,$$

basta seguir los siguientes pasos:

1) En la ecuación [18] sustituimos i^* por k, resultando:

$$-a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{mb_t}{(1 + k)^t(1 + \theta'_{cr})^t} - \sum_{t=1}^{n} \frac{g_t}{(1 + k)^t} = 0 \qquad [19]$$

2) A partir de la ecuación anterior se determina θ'_{cr} valiéndose de las técnicas utilizadas en el cálculo de la tasa de rentabilidad interna.

θ'_{cr} tiene un significado similar a θ_{cr}, ya que la única diferencia entre ambos coeficientes se debe a la existencia de gastos fijos. Dejamos, pues, su interpretación detallada a cargo del lector. A partir de θ'_{cr} es inmediato obtener h'_{cr} teniendo en cuenta la relación que existe entre ambos coeficientes.

2.4. *Variación lineal de los márgenes brutos de explotación*

Para el caso de variación lineal de los márgenes brutos de explotación, expresada por f', la ecuación que nos permite determinar la tasa de rentabilidad interna efectiva es:

$$-a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{f'mb_t}{(1 + i^*)^t} - \sum_{t=1}^{n} \frac{g_t}{(1 + i^*)^t} = 0 \qquad [20]$$

expresión a partir de la cual es posible determinar un valor crítico de f' que iguala i^* con k:

$$f'_{cr} = \frac{a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{g_t}{(1 + k)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{mb_t}{(1 + k)^t}} \qquad [21]$$

f'_{cr} se interpreta de modo similar a f_{cr}, teniendo en cuenta el efecto de los gastos fijos.

2.5. *Extensión al valor actual neto*

Cuanto acabamos de exponer para el análisis de sensibilidad referido a la tasa de rentabilidad interna, puede hacerse extensivo al valor actual neto (*VAN*), teniendo en cuenta que:

a) La determinación del *VAN* para un valor concreto del factor de variación, sea exponencial o lineal, es prácticamente obvia.

b) Puede calcularse un valor crítico del factor de variación que proporcione el mínimo valor actual neto ($VAN_{mín}$) que el decisor está dispuesto a aceptar.

Para ello basta con sustituir, en las expresiones correspondientes al cálculo de los valores críticos, a_0 por $(a_0 + VAN_{mín})$, además de efectuar la ya conocida sustitución de i^* por k. Conviene precisar que para el caso de variación exponencial de los recursos generados por la explotación, el cálculo del valor crítico de la tasa de descuento equivalente a h, que ahora designaremos por $\hat{\theta}$, no puede hacerse directamente a partir de i^* y k, sino que es preciso recurrir a la siguiente expresión:

$$-(a_0 + VAN_{mín}) + \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1 + k)^t(1 + \hat{\theta}_{cr})^t} = 0 \qquad [22]$$

3. Análisis de sensibilidad del valor final neto

3.1. *El valor final neto y los proyectos agregados*

Ocupémonos ahora de aplicar el análisis de sensibilidad al valor final neto, en un marco de proyectos agregados[9]. En tal marco el valor final neto se obtiene mediante la reinversión a una determinada tasa, r, de los fondos liberados en cada período por la diferencia entre los flujos del proyecto de inversión, a_t, y los flujos del proyecto de financiación asociado al anterior, b_t, una vez realizados los correspondientes ajustes de liquidez si hubiera lugar a ello[10], de manera que la expresión resultante es:

$$VFN = \sum_{t=1}^{n} (a_t - b_t)(1 + r)^{n-t} \qquad [23]$$

El cálculo del valor final neto por este procedimiento se halla íntimamente asociado a la planificación financiera que significa el proyecto agregado. Este hecho permite realizar un análisis de sensibilidad más amplio, pero también introduce en el mismo una mayor complejidad con respecto a los casos que anteriormente hemos considerado. Dentro del análisis de sensibilidad del valor final neto cabe distinguir dos puntos principales: el análisis de sensibilidad para cada período y el análisis de sensibilidad global.

3.2. *Análisis de sensibilidad para cada período*

En el análisis de sensibilidad para cada período lo más lógico y sencillo consiste en considerar el caso de una variación lineal, cuyo factor también aquí designaremos por f, teniendo presente que ahora no nos interesamos por una variación uniforme para todos los períodos, sino particular para cada uno de ellos. Refiriéndola a los recursos generados por la explotación podemos escribir:

[9] Sobre proyectos agregados, véase Montllor (1978) y (1982).

[10] Sobre los ajustes de liquidez en proyectos agregados, véase Montllor (1978) o (1982, apéndice).

$$f_t a_t - b_t = 0 \qquad [24]$$

Por tanto $(1 - f_t)$ indica la máxima reducción que pueden experimentar los recursos generados por la explotación en t, sin que los fondos liberados en tal período resulten negativos. Con los valores $(1 - f_t)$ referidos al conjunto de los períodos, se obtiene un vector de límites de variación. Cuando en la evolución real del proyecto agregado se sobrepasa el límite de variación de un período concreto, surge la necesidad de realizar un reajuste de tesorería referido a tal período.

Igualmente podemos operar con el margen bruto de explotación:

$$f'_t mb_t - g_t - b_t = 0 \qquad [25]$$

correspondiéndole una interpretación idéntica a la que acabamos de realizar.

Si deseamos obtener unos indicadores-resumen de $(1 - f_t)$ o de $(1 - f'_t)$, podemos calcular su media y su desviación típica que nos expresan, respectivamente, el equilibrio financiero medio esperado y la amplitud de sus oscilaciones a lo largo de los diferentes períodos.

De cuanto acabamos de decir se desprende que el análisis de sensibilidad del valor final neto para cada período —y por tanto para sus fondos liberados— se traduce en un análisis de la tesorería del proyecto, sin una relación directa con la rentabilidad del mismo. En cierta manera no hacemos más que referir a un proyecto agregado el cálculo monoperiódico del punto muerto de cobros y pagos.

3.3. *Análisis de sensibilidad global*

Podemos también aplicar un análisis de sensibilidad global al valor final neto. Consideremos el caso de variación lineal de los recursos generados por la explotación según un factor f, uniforme para todos los períodos, y escribamos:

$$VFN = \sum_{t=1}^{n} (fa_t - b_t)(1 + r)^{n-t} \qquad [26]$$

Nuestro propósito es determinar aquel valor de f que anula el valor final neto. Este cálculo debe enfrentarse con una dificultad significativa que aparece cuando para un cierto período l resulta que, a causa del valor concreto que toma f, tenemos un valor negativo de los fondos liberados:

$$(fa_l - b_l) < 0 \qquad [27]$$

con lo cual carece de sentido capitalizarlos a la tasa de reinversión.

Resulta entonces necesario prever un aplazamiento en el pago de aquella cifra negativa o bien cubrirla con fondos procedentes de períodos anteriores, hechos

que equivalen a introducir un proyecto de financiación complementario, respecto a cuyas características de distribución temporal hay que tener en cuenta tanto sus efectos sobre la nueva distribución de liquidez como en el propio valor final neto.

Entrar a considerar aplazamientos intermedios originaría aquí una notable, y en cierto modo estéril por cuanto luego veremos, complicación formal. Haremos, pues, una hipótesis simplificativa consistente en suponer que cuando los fondos liberados de un período devienen negativos a causa de una reducción de los recursos generados por la explotación, se realiza la política compensatoria de los aplazamientos intermedios que a continuación exponemos.

Un aplazamiento intermedio significa que si un determinado período l presenta fondos liberados negativos $c_l < 0$, situamos el vencimiento de los mismos en $p < n$, es decir, en un período anterior al final de la vida del proyecto agregado. Por tanto, los fondos liberados de p, c_p, se transforman en:

$$c_p + c_l(1 + k)^{p-l} \qquad [28^{11}]$$

originándose la siguiente reducción en el valor final neto:

$$\begin{aligned} \nabla_1 VFN &= [c_p + c_l(1 + k)^{p-l}](1 + r)^{n-p} - c_p(1 + r)^{n-p} = \\ &= c_l(1 + k)^{p-l}(1 + r)^{n-p} \end{aligned} \qquad [29]$$

que es una cifra negativa por $c_l < 0$.

La alteración producida en caso de haber capitalizado c_l hasta n, habría sido:

$$\nabla_2 VFN = c_l(1 + k)^{n-l} \qquad [30]$$

La diferencia entre $\nabla_1 VFN$ y $\nabla_2 VFN$ puede compensarse si en p la empresa se endeuda por la cifra $c_l(1 + k)^{p-l}$ hasta n a la tasa k y, a la vez, invierte esta cantidad a la tasa de reinversión de los fondos liberados de modo que en n dispone de:

$$\begin{aligned} &[-c_l(1 + k)^{p-l}](1 + r)^{n-p} + c_l(1 + k)^{p-l}(1 + k)^{n-p} = \\ &= -c_l(1 + k)^{p-l}(1 + r)^{n-p} + c_l(1 + k)^{n-l} \end{aligned} \qquad [31]$$

Sumando [29] a [31] la alteración total del valor final neto se transforma en [30], es decir, en la misma que habíamos obtenido aplazando c_l directamente hasta el final de la vida del proyecto.

En consecuencia, asumiendo la hipótesis que acabamos de describir, podemos realizar el análisis de sensibilidad del valor final neto como si todos los fondos liberados que eventualmente puedan resultar negativos a causa de la reducción de

[11] Cuanto decimos sobre el aplazamiento de c_l desde l hasta p es equivalente para el caso en que $c_l < 0$ se subdivida en diferentes fracciones que se aplacen hasta otros tantos períodos. Ello será necesario siempre que c_p no pueda absorber en su totalidad a $c_l(1 + k)^{p-l}$, es decir, siempre que $c_p + c_l(1 + k)^{p-l} < 0$.

los recursos generados por la explotación que el propio análisis contempla, sean aplazados hasta el período final de la vida del proyecto agregado, capitalizándose al coste de capital del proyecto de financiación.

Concretamos, pues, el análisis de sensibilidad del valor final neto para el caso de variación lineal de los recursos generados por la explotación en la búsqueda de un valor crítico de f, tal que:

$$VFN = \sum_{t=1}^{n} (f_{cr}a_t - b_t)(1 + x)^{n-t} = 0 \qquad [32]$$

donde:

$$x = r \text{ si y sólo si } (f_{cr}\, a_t - b_t) > 0 \qquad [33]$$

$$x = k \text{ si y sólo si } (f_{cr}\, a_t - b_t) < 0 \qquad [34]$$

siendo evidentemente trivial el caso en que $f_{cr}\, a_t - b_t = 0$.

El cálculo de f_{cr} no es directo, pero puede realizarse mediante un pequeño algoritmo que consta de los siguientes pasos:

I) Calculamos f_1 tal que:

$$\sum_{t=1}^{n} (f_1 a_t - b_t)(1 + r)^{n-t} = 0 \qquad [35]$$

y podemos hallarnos en una de las siguientes situaciones:

a) $(f_1 a_t - b_t) \geqslant 0, \forall\, t \neq n$, y entonces $f_1 = f_{cr}$.

b) Si existe al menos un $(f_1 a_t - b_t) < 0$ es evidente que este flujo debería haberse capitalizado a k en lugar de a r y, por ello, f_1 no coincide con el valor crítico de f. Continuamos entonces con el siguiente paso.

II) Calculamos f_2 tal que:

$$\sum_{\forall q} (f_2 a_q - b_q)(1 + r)^{n-q} + \sum_{\forall l} (f_2 a_l - b_l)(1 + k)^{n-l} = 0 \qquad [36]$$

donde el subíndice q sustituye al subíndice t cuando $(f_1 a_t - b_t) > 0$ y el subíndice l sustituye a t cuando $(f_1 a_t - b_t) < 0$.

Realizando este cálculo podemos hallarnos en uno de los siguientes casos:

a') $(f_2 a_q - b_q) \geqslant 0, \forall\, q$ y $(f_2 a_l - b_l) \leqslant 0, \forall\, l$, con lo que $f_2 = f_{cr}$.

b') No se cumple *a'*) por inversión del signo de una o varias de las desigualdades de subíndices q o l. Proseguimos con un tercer paso, similar al que acabamos de realizar.

III) Calculamos f_3 tal que:

$$\sum_{\forall q} (f_3 a_q - b_q)(1 + r)^{n-q} + \sum_{\forall l} (f_3 a_l - b_l)(1 + k)^{n-l} = 0 \qquad [37]$$

donde el subíndice q sustituye al subíndice t cuando $(f_2 a_t - b_t) > 0$, y el subíndice l sustituye al subíndice t cuando $(f_2 a_t - b_t) < 0$. Realizado este cálculo, podemos hallarnos en uno de los siguientes casos:

$a'')$ $(f_3 a_q - b_q) \geqslant 0$, $\forall\, q$ y $(f_3 a_l - b_l) \leqslant 0$, $\forall\, l$, con lo que $f_3 = f_{cr}$

$b'')$ No se cumple $a'')$ por inversión del signo de una o varias de las desigualdades de subíndices q o l. En tal caso, repetimos sucesivamente la estructura de este paso hasta obtener un f_j tal que cumpla las condiciones [33] y [34], tratándose, pues, del valor crítico de f que estábamos buscando. La convergencia de este algoritmo se explica detalladamente en el apéndice.

4. Análisis de sensibilidad de la duración temporal de los proyectos

4.1. *Aspectos básicos*

La vida de un proyecto de inversión es objeto de análisis de sensibilidad en la medida en que no se trata de una variable cierta. Tal análisis no presenta dificultades significativas, pero a partir del mismo podemos obtener algunos resultados interesantes sobre las características de la evolución temporal de los proyectos.

Ciertamente el caso más sencillo de este tipo de análisis consiste en repetir el cálculo del modelo elegido para valorar el rendimiento de la inversión, eliminando los últimos flujos hasta llegar a una cifra crítica de tal rendimiento, como puede ser un valor actual neto nulo o una tasa de rentabilidad interna igual al coste de capital. Conocemos entonces la mínima duración que debe tener el proyecto para ser aceptable en términos de rentabilidad. La diferencia entre la vida esperada del proyecto (n) y la mínima duración requerida ($n_{mín}$) constituye lo que podemos denominar margen de seguridad temporal del mismo. Asimismo, podemos definir el factor de resistencia temporal de un proyecto como $\left(1 - \frac{n - n_{mín}}{n}\right)$ que indica la máxima reducción en tanto por uno, que puede experimentar la vida del proyecto sin que se sitúe por debajo de $n_{mín}$. En lo que sigue centraremos nuestras observaciones en el desglose temporal de la tasa de rentabilidad interna y en el período crítico de un proyecto agregado. Ambos enfoques permiten situar el conocido criterio del plazo de recuperación —frecuentemente designado según su denominación inglesa «pay-back»— en un marco más amplio.

4.2. *El desglose temporal de la tasa de rentabilidad interna*

Para todo proyecto de inversión cuya vida se extiende a lo largo de n períodos, podemos calcular los valores de las hipotéticas tasas de rentabilidad interna que se

obtendrían en caso de finalizar la vida del proyecto en cada uno de los períodos anteriores a n, haciendo:

$$\sum_{t=0}^{j} \frac{a_t}{(1 + r_j^*)^t} = 0, \quad \forall j < n \qquad [38]$$

Podemos entonces fijar nuestra atención en las tasas r_A^*, r_B^* y r_C^*, correspondientes a determinados períodos que designaremos por A, B y C, que cumplen:

a) $r_{A-1}^* < 0$ y $r_A^* \geqslant 0$.

b) $r_{B-1}^* < i$ y $r_B^* \geqslant i$.

c) $r_{C-1}^* < k$ y $r_C^* \geqslant k$[12].

Estas tasas reflejan lo siguiente:

a) En el período A se ha obtenido la recuperación del capital inicialmente aportado. Se trata, pues, del plazo de recuperación[13].

b) En el período B se ha alcanzado una rentabilidad igual a la tasa de interés libre de riesgo, i.

c) En el período C se ha alcanzado una rentabilidad igual al coste de capital k.

Observamos que los casos *b*) y *c*) corresponden, para diferentes valores de la tasa de descuento, al concepto de plazo de recuperación descontado que consiste en calcular dicho plazo a partir de los valores descontados de los flujos del proyecto de inversión[14]. Conviene destacar, asimismo, que el vector (A, B, C, n) puede interpretarse como el desarrollo temporal de la tasa de rentabilidad interna del proyecto analizado. En el supuesto de una tasa de rentabilidad interna inferior al coste de capital, la vida del proyecto no alcanza un hipotético período C y cabe incluso la posibilidad de que n sea inferior a B e incluso a A, pero en todos estos casos se trata de proyectos claramente rechazables.

Desde una óptica de proyectos agregados la validez como modelo del desglose temporal que aquí hemos considerado, requiere un proyecto de financiación en el que sus primeros flujos se destinan a cubrir las amortizaciones financieras y luego, una vez satisfecho este objetivo en su integridad, se destinan totalmente a la remuneración del capital.

[12] Si el lector desea una mayor precisión, puede conocer el momento aproximado en que se ha alcanzado cada uno de dichos niveles de rentabilidad, aplicando un proceso de interpolación. Caso de conocerse exactamente la distribución temporal de los flujos de caja dentro de cada período, tal momento también puede conocerse con exactitud.

[13] A menudo se ha utilizado el plazo de recuperación como criterio de selección de inversiones. Sobre este particular véase Serra Ramoneda (1966) y Ribas (1976).

[14] Sobre el concepto de plazo de recuperación descontado («discounted pay-back»), véase Brealey y Myers (1984), pág. 68.

4.3. *El período crítico de un proyecto agregado*

Tras exponer la descomposición temporal de la tasa de rentabilidad interna, vamos a analizar la sensibilidad de la vida de una inversión a través de un proyecto agregado, cuestión que centraremos en la noción de período crítico del mismo.

Entendemos por valor neto de un proyecto agregado al final del período j (VN_j) la riqueza que tal proyecto ha generado desde su inicio hasta j:

$$VN_j = \sum_{t=1}^{j} (a_t - b_t)(1 + r)^{j-t} \qquad [39]$$

Por otra parte, entendemos como valor de rescate de un proyecto de financiación al final del período j —una vez ya cubierto el servicio financiero correspondiente al mismo— aquella cantidad que debe pagarse en tal momento para liberarse de asumir los flujos de dicho proyecto entre $j + 1$ y n, el final de su vida[15]. El cálculo de dicho valor de rescate ($VRPF_j$) se efectúa actualizando al final de j, o, lo que es lo mismo, al principio de $j + 1$ los flujos del proyecto de financiación comprendidos entre $j + 1$ y n:

$$VRPF_j = \sum_{t=j+1}^{n} \frac{b_t}{(1 + k)^{t-j}} \qquad [40]$$

donde b_t designa el flujo del proyecto de financiación correspondiente al período t, como ya antes hemos indicado.

Podemos entonces definir la propiedad de valor satisfactorio de un proyecto agregado. Cumplen tal propiedad todos aquellos valores netos del mismo que permiten:

a) Eliminar los flujos futuros del proyecto de financiación, mediante el rescate del mismo.

b) Neutralizar los futuros flujos negativos del proyecto de inversión, en caso de haberlos, mediante la reinversión de una determinada cifra que resulte suficiente para cubrirlos en el momento previsto. Denominaremos reinversión mínima (RM) a esta cantidad y su valor al final de j, aceptando que su rendimiento futuro será la propia tasa de reinversión considerada en el proyecto agregado, es el siguiente:

$$RM_j = \sum_{t=j+1}^{n} \frac{a_t}{(1 + r)^{t-j}}, \quad \forall (a_{t \geq j+1}) < 0 \qquad [41]$$

[15] En principio podemos pensar que se trata exclusivamente de flujos negativos formados por intereses, otros componentes del coste de capital y amortizaciones financieras. Nada impide, sin embargo, la existencia de algún flujo positivo posterior que más adelante origine otros flujos negativos de la naturaleza que acabamos de comentar.

Definimos como período crítico de un proyecto agregado, j', aquel que, de entre todos los que cumplen la propiedad de valor satisfactorio, se halla más próximo al origen del proyecto. Así pues, en tal período se cumple:

$$VN_t < VRPF_t + RM_t, \quad \forall\, t < j' \qquad [42]$$

$$VN_{j'} \geqslant VRPF_{j'} + RM_{j'} \qquad [43\,^{16}]$$

El período crítico es la duración mínima que debe tener el proyecto de inversión y, por tanto, el proyecto agregado, para suministrar la rentabilidad mínima exigida y recuperar la inversión efectuada, teniendo en cuenta el proyecto de financiación efectivamente adoptado y la tasa de reinversión prevista. Este significado es, por supuesto, independiente de que se decida o no efectuar el rescate mencionado; lo verdaderamente importante es que se está en condiciones de llevarlo a cabo. En caso de que así se haga, los fondos liberados que a partir de entonces se produzcan coincidirán con los flujos netos positivos esperados del proyecto de inversión, siempre que se cumplan las previsiones efectuadas en relación al mismo y a la tasa de reinversión[17].

5. Conclusiones

Este trabajo se ha centrado en el estudio de la incidencia sobre la rentabilidad de los proyectos de inversión, de las desviaciones sistemáticas de los valores efectivos de los flujos de caja y de la duración temporal de tales proyectos con respecto a sus valores esperados, temática que constituye un aspecto concreto del análisis de sensibilidad de las decisiones de inversión. En todos los casos considerados nuestro esfuerzo se ha dirigido hacia la determinación de unos valores críticos —expuestos detalladamente en el cuerpo del artículo— por debajo de los cuales el proyecto objeto de atención deja de ser rentable. En consecuencia, resulta posible conocer el margen de variación o de seguridad de que se dispone para cada variable —considerada como parámetro por la convención metodológica expuesta en la introducción— en una hipótesis de «caeteris paribus» respecto a las restantes.

Este enfoque puede aplicarse a cualquiera de los diferentes modelos que existen para medir el rendimiento de las inversiones y así, en el curso del trabajo, lo hemos adaptado a la tasa de rentabilidad interna, al valor actual neto y al valor final neto. Con todo ello, no hemos tratado más que de establecer un marco de

[16] Si [43] se cumple como igualdad, podemos denominar a VN'_j «valor crítico» del proyecto agregado. Si [43] se cumple como desigualdad es posible conocer el valor crítico de forma aproximada mediante interpolación o bien adaptando el proceso expuesto en el texto del artículo a períodos de tiempo sucesivamente más reducidos hasta que se alcance tal igualdad.

[17] El período crítico de un proyecto agregado puede concebirse como una reformulación del plazo de recuperación que, lógicamente, no es la única posible. Blatt (1979) propone un concepto de plazo de recuperación modificado que consiste en situar dicho plazo en el período en que los flujos generados por la inversión han sido suficientes para recuperar el capital inicial retribuyéndolo a la tasa de interés libre de riesgo y constituir además un fondo que actúe como margen de seguridad contra futuros desastres.

referencia en relación al cual caben numerosas reformulaciones que el analista debe saber adecuar a cada caso concreto. La acertada elección del modelo de rentabilidad a aplicar es una cuestión fundamental de la que no hemos tratado en este trabajo, pues no era el propósito del mismo, ya que debe haberse dilucidado antes de examinar la sensibilidad del modelo elegido.

Cuanto hemos expuesto ilustra que el análisis de sensibilidad es una técnica relativamente poco complicada y de bajo coste de aplicación, cuya utilidad es evidente en el estudio de las decisiones de inversión en condiciones de riesgo. Sin embargo, tal estudio quedaría incompleto en caso de pretender llevarlo a cabo solamente en base al análisis de sensibilidad, el cual debe aplicarse de forma coordinada con la simulación y las técnicas de análisis de riesgo de base estadística y econométrica. Corresponde a la sagacidad del analista el saber hallar una adecuada combinación de las técnicas disponibles que suministre al decisor un grado de información que resulte satisfactorio, tanto por su amplitud y profundidad como por el coste de los oportunos estudios[18].

Apéndice I. Convergencia del algoritmo para el cálculo del valor crítico de f en el análisis de sensibilidad global del valor final neto

Veamos ahora la convergencia de este algoritmo para los casos en que: *a*) la tasa de reinversión es superior al coste de capital, y *b*) la tasa de reinversión es inferior al coste de capital. El caso de igualdad entre ambas variables resulta trivial, pues no plantea el tipo de problema que este algoritmo trata de resolver.

a) *Convergencia para el caso* $r > k$

De acuerdo con lo indicado en el algoritmo, en primer lugar calculamos f_1 según [35], pero si como consecuencia del valor hallado para f_1 aparecen algunos fondos liberados negativos, éstos deben capitalizarse a k y resulta:

$$\sum_{\forall q} (f_1 a_q - b_q)(1 + r)^{n-q} + \sum_{\forall l} (f_1 a_l - b_l)(1 + k)^{n-l} > 0 \qquad [A1]$$

donde los subíndices q y l tienen el mismo significado que en [36]. La expresión [44] presenta valor positivo por cuanto hemos pasado a capitalizar a una tasa inferior, k, los fondos liberados negativos que al aplicar [35] capitalizábamos a r.

El segundo paso del algoritmo exige que apliquemos un factor f_2 inferior a f_1 de modo que se cumpla la igualdad [36]. Dado que $f_2 < f_1$ no resulta posible que ningún $(f_2 a_l - b_l)$ se haya transformado en positivo, pero sí cabe la posibilidad de que uno o varios $(f_2 a_q - b_q)$ hayan devenido negativos. Razonando de modo

[18] Esta combinación de técnicas se halla estrechamente relacionada con la propia ordenación del estudio que toda selección de inversiones requiere. No es éste el lugar adecuado para entrar en detalles específicos sobre esta cuestión. El lector interesado en la misma puede consultar Kennedy (1968) o Brealey y Myers (1984), págs. 239-259.

similar establecemos que $f_3 < f_2$, para el caso en que $f_2 \neq f_{cr}$. Repitiendo sucesivamente tal argumentación podemos extenderla a f_{p-1} anterior a f_{cr}.

Veamos ahora que también se cumple $f_p < f_{p-1}$. Para f_{p-1} tenemos:

$$\sum_{\forall q} (f_{p-1}a_q - b_q)(1 + r)^{n-q} + \sum_{\forall l} (f_{p-1}a_l - b_l)(1 + k)^{n-l} = 0 \qquad [A2]$$

donde q y l tienen el mismo significado que en [36], pero referidos a la interación que ahora consideramos.

Si $f_{p-1} \neq f_{cr}$ es porque de nuevo tenemos capitalizados a r algunos fondos liberados negativos —a causa del valor de f_{p-1}— que deben capitalizarse a k. Al hacerlo así pasamos a obtener otra vez un valor final neto positivo, de modo que para anularlo debemos aplicar un factor f_p inferior a f_{p-1}. Constatamos así que, en el presente caso, los factores f forman una sucesión decreciente.

Veamos cómo tal sucesión tiene un límite inferior. En el cálculo de los sucesivos valores de f es imposible que en una iteración determinada p' resulte que $(f_{p'}a_t - b_t) \leqslant 0$, $\forall\, t$, ya que entonces no se cumpliría la ecuación que iguala a cero el valor final neto y a partir de la cual hemos calculado f_p. Así pues, es preciso que al menos los fondos liberados de un determinado período resulten positivos. Supongamos que hemos llegado a esta situación en la iteración $w - 1$ de modo que aplicando f_{w-1} sobre los recursos generados por la explotación sólo resultan positivos los fondos liberados de un determinado período s, siendo negativos o nulos los restantes. Supongamos también que $f_{w-1} \neq f_{cr}$ y escribamos:

$$(f_w a_s - b_s)(1 + r)^{n-s} + \sum_{\forall\, l \neq s} (f_w a_t - b_t)(1 + k)^{n-t} = 0 \qquad [A3]$$

de donde es posible despejar f_w y entonces $f_w = f_{cr}$, pues $(f_w a_s - b_s) > 0$ ya que es una exigencia de la propia ecuación [A3] y el resto de fondos liberados son negativos o nulos por $f_w < f_{w-1}$. Con ello se asegura la convergencia del algoritmo y la existencia de solución para el caso $r > k$.

b) *Convergencia para el caso* $r < k$

Igualmente como en el caso anterior y de acuerdo con lo indicado en el algoritmo calculamos f_1 según [35]; los fondos liberados negativos que, como consecuencia de la aplicación de f_1 puedan aparecer, deben asimismo capitalizarse a k, pero ahora resulta que:

$$\sum_{\forall q} (f_1 a_q - b_q)(1 + r)^{n-q} + \sum_{\forall l} (f_1 a_l - b_l)(1 + k)^{n-l} < 0 \qquad [A4]$$

donde los subíndices q y l tienen los significados que ya conocemos. La expresión [A4] presenta un valor negativo por cuanto hemos pasado a capitalizar a una tasa superior k los fondos liberados negativos que en [35] capitalizábamos a r.

El segundo paso del algoritmo exige ahora que apliquemos un factor f_2 superior a

f_1 de modo que se cumpla la igualdad [36]. Dado que $f_2 > f_1$, no resulta posible que ningún $(f_2 a_q - b_q)$ se haya transformado en negativo por el hecho de sustituir f_1 por f_2, pero sí cabe la posibilidad de que algún $(f_2 a_l - b_l)$ sea ahora positivo. Si así ha ocurrido —y por tanto $f_2 \neq f_{cr}$— tenemos nuevamente un valor final neto negativo, ya que tales fondos positivos han debido capitalizarse a $r < k$. Luego debemos aplicar un factor $f_3 > f_2$ que anule el valor final neto. Repitiendo sucesivamente tal argumentación podemos extenderla a f_{p-1} anterior a f_{cr}. Se cumple también que $f_p > f_{p-1}$, pues si $f_{p-1} \neq f_{cr}$ es a causa de tener capitalizados a k en [A2], algunos fondos liberados positivos que debemos capitalizar a r. Al hacerlo así pasamos a obtener nuevamente un valor final neto negativo de modo que para anularlo debemos aplicar un factor $f_p > f_{p-1}$. Constatamos así que en el caso ahora considerado los factores f forman una sucesión creciente.

Tal sucesión tiene un límite superior. Puesto que es imposible que en una iteración determinada, p', resulte que $(f_{p'} a_t - b_t) \geqslant 0$, $\forall t$, ya que entonces no se cumpliría la ecuación a partir de la cual hemos calculado $f_{p'}$, es preciso que al menos los fondos liberados de un período resulten negativos. Supongamos que hemos llegado a esta situación en la iteración $w - 1$ de modo que aplicando f_{w-1} sobre los recursos generados por la explotación sólo resultan negativos los fondos liberados de un determinado período s, siendo positivos o nulos los restantes. Supongamos también que $f_{w-1} \neq f_{cr}$ y escribamos:

$$(f_w a_s - b_s)(1 + k)^{n-s} + \sum_{\forall t \neq s} (f_w a_t - b_t)(1 + r)^{n-t} = 0 \qquad [A5]$$

de donde es posible despejar f_w y entonces $f_w = f_{cr}$ pues $(f_w a_s - b_s) < 0$ ya que es una propia exigencia de la ecuación [48] y el resto de fondos liberados se mantienen positivos por $f_w > f_{w-1}$. Con ello se asegura la convergencia del algoritmo y la existencia de solución para el caso $r < k$.

Apéndice II. Ejemplo de aplicación del algoritmo para el cálculo del valor crítico de f en el análisis de sensibilidad global del valor final neto

Veamos a continuación un pequeño ejemplo que ilustra la aplicación del algoritmo para el cálculo del valor crítico de f en el análisis de sensibilidad global del valor final neto. Sean los siguientes datos:

Proyecto de inversión: −1.000; 500; 1.300; 900; 1.000
Proyecto de financiación: 1.000; −425; −425; −425; −425

TRI del proyecto de inversión: 73,72 por 100

Coste de capital: 25,21 por 100

Tasa de reinversión: 40 por 100

Calculando el valor final neto a partir del proyecto agregado, tenemos:

$$VFN = (500 - 425)(1{,}40)^3 + (1.300 - 425)(1{,}40)^2 + \\ + (900 - 425)(1{,}40) + (1.000 - 425) = 3.160{,}80$$

Apliquemos, pues, el algoritmo:

1) Cálculo de f_1:

$$(500f_1 - 425)(1{,}40)^3 + (1.300f_1 - 425)(1{,}40)^2 + \\ + (900f_1 - 425)(1{,}40) + (1.000f_1 - 425) = 0$$

$$f_1 = 0{,}4885$$

pero $f_1 \neq f_{cr}$, ya que:

$$500 \times 0{,}4885 - 425 = -180{,}73 < 0$$

2) Cálculo de f_2:

$$(1.300f_2 - 425)(1{,}40)^2 + (900f_2 - 425)(1{,}40) + \\ + (1.000f_2 - 425) + (500f_2 - 425)(1{,}2521)^3 = 0$$

$$f_2 = 0{,}4642$$

pero $f_2 \neq f_{cr}$, ya que:

$$900 \times 0{,}4642 - 425 = -7{,}22 < 0$$

3) Cálculo de f_3:

$$(1.300f_3 - 425)(1{,}40)^2 + (1.000f_3 - 425) + \\ + (500f_3 - 425)(1{,}2521)^3 + (900f_3 - 425)(1{,}2521) = 0$$

$$f_3 = 0{,}4640$$

siendo además $f_3 = f_{cr}$, pues al aplicar este factor no se producen nuevos cambios en el signo de los fondos liberados anteriores al período final:

$$500 \times 0{,}4640 - 425 < 0$$
$$1.300 \times 0{,}4640 - 425 > 0$$
$$900 \times 0{,}4640 - 425 < 0$$

Como hemos indicado en el apéndice anterior, cuando $r < k$ el proceso de convergencia del algoritmo es algo diferente en relación al caso en que $r > k$.

Para ilustrarlo, supondremos una tasa de reinversión del 10 por 100, manteniendo iguales el resto de datos del ejemplo.

1) Cálculo de f_1:

$$(500f_1 - 425)(1{,}10)^3 + (1.300f_1 - 425)(1{,}10)^2 +$$
$$+ (900f_1 - 425)(1{,}10) + (100f_1 - 425) = 0$$
$$f_1 = 0{,}4665$$

pero $f_1 \neq f_{cr}$, ya que:

$$500 \times 0{,}4665 - 425 = -191{,}77 < 0$$
$$900 \times 0{,}4665 - 425 = - \ 5{,}18 < 0$$

2) Cálculo de f_2:

$$(1.300f_2 - 425)(1{,}10)^2 + (1.000f_2 - 425) +$$
$$+ (500f_2 - 425)(1{,}2521)^3 + (900f_2 - 425)(1{,}2521) = 0$$
$$f_2 = 0{,}4925$$

pero $f_2 \neq f_{cr}$, ya que:

$$900 \times 0{,}4642 - 425 = -7{,}22 < 0$$

3) Cálculo de f_3:

$$(1.300f_3 - 425)(1{,}10)^2 + (900f_3 - 425)(1{,}10) +$$
$$+ (1.000f_3 - 425) + (500f_3 - 425)(1{,}2521)^3 = 0$$
$$f_3 = 0{,}4931$$

siendo además $f_3 = f_{cr}$, pues al aplicar este factor no se producen nuevos cambios en el signo de los fondos liberados anteriores al período final:

$$500 \times 0{,}4931 - 425 < 0$$
$$1.300 \times 0{,}4931 - 425 > 0$$
$$900 \times 0{,}4931 - 425 > 0$$

Referencias

Blatt, John M. (1979): «Investment Evaluation under Uncertainty», en *Financial Management,* Verano, págs. 66-81.

Brealey, R., y Myers, S. (1984): *Principles of Corporate Finance* (2.ª ed.), McGraw-Hill.

Bunge, Mario (1979): *La investigación científica,* Ed. Ariel, Barcelona.

Franks, J. R., y Broyles, J. E. (1979): *Modern Managerial Finance,* John Wiley and Sons.

Kennedy, Miles (1968): «Risk in Capital Budgeting: An Interactive Sensitivity Approach», en *Industrial Management Review,* Primavera, págs. 121-140.

Huefner, Ronald J. C. (1971): «Analyzing and Reporting Sensitivity Data», en *Accounting Review,* octubre, págs. 717-732.

Huefner, Ronald J. C. (1972): «Sensitivity Analysis and Risk Evaluation», en *Decision Sciences,* julio, págs. 128-135.

Joy, Maurice, y Bradley, Jerry (1973): «A Note on Sensitivity Analysis of Rates of Return», en *Journal of Finance,* vol. XXVIII, núm. 5, diciembre, págs. 1255-1261.

Joy, Maurice, y Bradley, Jerry (1978): «Sensitivity Analysis of Rates of Return: Reply», en *Journal of Finance,* vol. XXXIII, núm. 5, diciembre, pág. 1461.

Montllor, Joan (1978): «Un modelo determinista de proyectos agregados de inversión-financiación: El valor final neto», en *Económicas y Empresariales,* núm. 9, págs. 152-163.

Montllor, Joan (1982): «Proyectos mixtos y proyectos agregados», en *Boletín de Estudios Económicos,* vol. XXXVII, núm. 115, abril, págs. 133-153.

Rappaport, Alfred (1967): «Sensitivity Analysis in Decision Making», en *Accounting Review,* julio, págs. 440-447.

Reinhard, U. E. (1973): «Break-Even Analysis of Lockheed's TriStar: An Application of Financial Theory», en *Journal of Finance,* vol. XXVIII, núm. 4, septiembre, págs. 821-838.

Ribas Mirangels, E. (1974): «Selección de proyectos de inversión: revisión», en *Revista Española de Financiación y Contabilidad,* núm. 10, octubre-diciembre, págs. 103-115.

Serra Ramoneda, A. (1966): «El pay-back como criterio de selección de inversiones», en *Alta Dirección,* marzo-abril.

Smith, W. James (1978): «Sensitivity Analysis of Rates of Return: Comment», en *Journal of Finance,* vol. XXXIII, núm. 5, diciembre, págs. 1457-1460.

Suárez Suárez, A. S. (1982): *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa,* Ed. Pirámide, Madrid.

Tarquin, A. J., y Blank, L. T. (1976): *Engineering Economy,* Ed. Mc-Graw-Hill, 1976.

Whisler, William, D. (1976): «Sensitivity Analysis of Rates of Return», en *Journal of Finance,* vol. XXXI, núm. 1, marzo, págs. 63-69.

Wilkes, F. M. (1983): *Capital Budgeting Techniques* (2.ª ed.), Jhon Wiley and Sons.

Abstract

This study focuses on the sensitivity of different ways of measuring of return on investments —internal rate of return, net present value and net terminal value— in relation to systematic changes in cash flows. Special attention is given to the calculation of the values of the factors of change which can make an investment undesirable. Through the net terminal value, the analysis extended to also cover the financial equilibrium for each period. Lastly, different versions of the pay back are given with a sensitivity analysis of the duration in time of investments.

Recepción del original, mayo de 1985.
Versión final, septiembre de 1985.